מבוא מתמטי לפיזיקאים 1

ד"ר יואב קלינברגר

תוכן עניינים

1 גבולות ונגזרות 6
1.1 מספרים ממשיים, פונקציות, גבולות של פונקציות 6
1.1.1 הקדמה על ספרים 6
1.1.2 על הקורס 6
1.1.3 על האותיות 6
1.1.4 סוגי מספרים 7
1.1.5 ערך מוחלט 8
1.1.6 קבוצות ותחומים 8
1.1.7 פונקציות ממשיות 9
1.1.8 תחום ההגדרה הטבעי של פונצקציה 9
1.1.9 הרכבת פונקציות 10
1.1.10 גרפים 10
1.1.11 רדיאנים 10
1.1.12 חזקות ולוגריתמים 11
1.1.13 קצת משחקים 12
1.1.14 הפונקציות האלמנטריות 13
1.2 גבולות של פונקציות 14
1.2.1 הגדרת הגבול 14
1.2.2 גבולות של פונקציות אלמנטריות 15
1.2.3 משפט הסנדוויץ' 15
1.2.4 חשבון גבולות 16
1.2.5 קצת גבולות טריגונומטריים 17
1.2.6 רציפות של פונקציה 18
1.2.7 גבולות חד-צדדיים 18
1.2.8 גבול במובן הרחב 19
1.3 נגזרות 20
1.3.1 פרדוקס החץ 20
1.3.2 מהירות 20
1.3.3 הגדרת הנגזרת 21
1.3.4 חישוב של נגזרות 21
1.3.5 עוד חישובי נגזרות 28
1.3.6 דיפרנציאל וקירוב ליניארי 31
1.3.7 משפט רול ומשפט ערך הביניים 32

2 אינטגרלים 34
2.1 אינטגרל מסויים 34
2.1.1 דוגמא פשוטה של אינטגרל מסויים בחישוב ישיר 35
2.2 אינטגרל לא מסויים והקשר בין אינטגרל לנגזרת 36
2.3 פונקציה קדומה 37
2.4 חישוב של אינטגרלים מסויימים בעזרת פונקציות קדומות 37
2.5 המשפט היסודי של הטבע 38
2.6 האינטגרל הוא פעולה ליניארית 38
2.7 אינטגרביליות 38
2.8 חישובי אינטגרלים 38
2.8.1 אינטגרלים מיידיים 38
2.8.2 החלפת משתנים 39
2.8.3 אינטגרציה בחלקים 42
2.8.4 אינטגרציה של פונקציות רציונליות 43
2.8.5 פונקציות רציונליות של $\sin x, \cos x$ 45
2.8.6 אינטגרלים לא אמיתיים 46

3 נוסחת טיילור 49
3.1 פולינומים 49
3.2 נוסחת טיילור 49
3.3 דוגמאות של נוסחת טיילור וטורי טיילור 51

4 ישומים של החדו"א 53
4.1 חקירת פונקציה 53
4.1.1 תחומי עלייה וירידה, מקסימה ומינימה 53
4.1.2 עקמומיות ונקודות פיתול 54
4.1.3 אסימפטוטות 55
4.1.4 חקירה מלאה של פונקציה 57
4.2 נפח גופי סיבוב 59

5 משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר ראשון 62
5.1 משוואות מסדר ראשון וממעלה ראשונה 63
5.1.1 מקדמים לא רציפים 65
5.1.2 הפרדת משתנים 66
5.1.3 משוואות הומוגניות 68

6 פונקציות מרובות משתנים 71
6.1 פונקציות מרובות משתנים ונגזרות חלקיות 71
6.2 נגזרת כיוונית 72
6.3 גבולות ורציפות 73
6.4 משוואות מדוייקות 74
6.4.1 גורמי אינטגרציה 76
6.5 מישור משיק 77
6.6 כלל השרשרת 78
6.6.1 נגזרת שלמה בעזרת נגזרות חלקיות 80
6.7 טור טיילור, דיפרנציאלים מסדר גבוה 80

6.8 נקודות קיצון 83
6.9 נקודות קיצון תחת אילוצים 86
6.9.1 הוכחה עבור שני משתנים 88
6.9.2 הכללה של שיטת כופלי לגרנז' ליותר משני משתנים 89
6.10 משוואות דיפרנציאליות חלקיות 90

7 אינטגרלים מרובים 91
7.1 החלפת קואורדינטות ויעקוביאנים 91
7.2 כלל השרשרת עבור יעקוביאנים 93
7.3 טרנספורמציה פרימיטיבית 94
7.4 גזירה תחת סימן האינטגרל 96
7.5 אינטגרל כפול 97
7.6 החלפת משתנים 100
7.7 אינטגרלים לא אמיתיים 104
7.7.1 תחום אינטגרציה אינסופי 104
7.7.2 נקודות סינגולריות 106
7.8 דוגמאות 107

8 מספרים מרוכבים 112
8.1 בסיס 112
8.2 שורש ריבועי 114
8.3 המישור המרוכב וכדור רימן 115
8.4 אקספוננציאל מרוכב 116
8.5 יצוג אקספוננציאלי 118
8.6 שורשי היחידה 118
8.7 קצת תרגילים 119
8.8 תכונות המיפוי של פונקציות 121
8.9 נקודות הסתעפות וענפים - פונקציות רב-ערכיות 121
8.9.1 נקודת הסתעפות 121
8.9.2 הלוגריתם 122
8.9.3 השורש וחזקות אחרות 122

9 משוואות דיפרנציאליות מסדר שני 124
9.1 משוואות מסדר שני 124
9.2 משפט קיום ויחידות 124
9.3 דוגמא 125
9.4 לינאריות 125
9.5 פתרונות בלתי-תלויים - וורונסקיאן 126
9.6 משוואה אופיינית 126
9.6.1 בעיות עם שורשים ממשיים שונים 127
9.6.2 בעיות עם שורשים מרוכבים 128
9.7 שורשים שחוזרים על עצמם 131
9.8 הורדת סדר של משוואה 133
9.9 משוואות לא הומוגניות 134
9.9.1 שיטת המקדמים הלא ידועים undetermined coefficients 135
9.9.2 וריאציה על פרמטרים 137

9.10 פתרון של אוסצילטור הרמוני עם מספרים מרוכבים 139

10 תרגילים ופתרונות **141**

הקדמה

הקורס הזה הוא קורס מעשי בטכניקות ותיאוריות מתמטיות שמהוות את הבסיס לכל עבודה בפיזיקה. בניגוד לקורסים בפקולטה למתמטיקה, אנו פחות מדייקים ומ-נסים בתמורה לכסות טווח רחב של נושאים בזמן קצר - וצריך לקחת זאת בחשבון. השתדלתי להיות מדוייק במידה הנכונה - לא יותר מדי ולא פחות מדי.

כדוגמא קיצונית לסוג הדיוק שהוא לא מעניינו - הרעיון של מספר ממשי כשהוא לעצמו, הוא נושא מתמטי מורכב ומתקדם, והאפשרות היחידה להבין אותו בצורה ראוייה דורשת ידע מתקדם בתורת הקבוצות ובאלגברה. עם זאת, אנו, כמו גדולים מאיתנו שקדמו לנו - נשתמש במספרים ממשיים כאילו שהם כמעט מובנים מאליהם.

לבסוף, על הקורא/ת לקחת בחשבון שרשימות אלה לא נבדקו בצורה מקצועית, וייתכן שיכילו טעויות. האחריות על הקורא/ת בלבד.

פרק 1

גבולות ונגזרות

1.1 מספרים ממשיים, פונקציות, גבולות של פונקציות

1.1.1 הקדמה על ספרים

החיבור של הכל עם הכל על ידי רשת המחשבים העולמית הוליד ציפייה מוטעית, כאילו כל המידע זמין בחיפוש בגוגל. אפילו בהנתן ספרים דיגיטליים, זה לא המצב. יש ידע שיטתי בספרים שלא זמין מיד בחיפוש ודורש קריאה סבלנית. קראו. נכון לעכשיו, אין לזה תחליף.

1.1.2 על הקורס

הקורס הוא קורס מעשי, ובאופן יחסי לא מדוייק. אתם תלמדו חדו"א בצורה יותר מדוייקת בקורס יעודי. כאן אנו עוסקים יותר בטכניקות מעשיות.

1.1.3 על האותיות

מי שלא יודע את האלף בית היווני הוא בור גמור, זה הכל. אשר על כן, הנה הוא ואת שמות האותיות יש לברר ולשנן

$$\begin{array}{cccccc} A\alpha & B\beta & \Gamma\gamma & \Delta\delta & E\epsilon\varepsilon & Z\zeta \\ H\eta & \Theta\theta\vartheta & I\iota & K\kappa & \Lambda\lambda & M\mu \\ N\nu & \Xi\xi & Oo & \pi\Pi & \rho P & \Sigma\sigma(\varsigma) \\ T\tau & Y\upsilon & \Phi\phi\varphi & X\chi & \Psi\psi & \Omega\omega \end{array}$$

לכן רשום בחזון יוחנן, פרק א פסוק ח': אני האלפא והאומגה - נאום ה', כלומר - אני ההתחלה והסוף.

הא"ב היווני הוא נגזרת של א"ב מזרח תיכוני קדום יותר (פניקי), ולא בכדי יש לו הרבה במשותף עם אלף-ביתים אחרים רבים בעולם כולו, למשל התבניות א-ב-ג, ר-ש-ת, כ-ל-מ-נ. אנו מכירים את הצירופים $A-B$, $R-S-T$, $K-L-M-N$ בא"ב הלטיני, וגם בערבית ניתן למצוא את א-ב-ג ואת כ-ל-מ-נ[1]

[1] בערבית זה קצת אחרת בגלל סמלים דומים שההבדלים ביניהם הם נקודות דיאקריטיות, ולכן הסמל של ג', ח ו-ח' זהה למעשה

1.1.4 סוגי מספרים

אנו מכירים את המספרים הטבעיים, השלמים והרציונליים.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

מסתבר שיש גם מספרים ממשיים

$$\mathbb{R}$$

שכוללים את כל הקבוצות הנ"ל, אך גם מספרים רבים נוספים - האי רציונליים $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. האי-רציונליים עצמם מתחלקים לאלגבריים - אלה שם פתרונות של משוואות עם מקדמים שלמים, למשל

$$x^2 - 2 = 0$$

כאלה יש באותה מידה שיש רציונליים. לעומת זאת, יש עוד א מספרים טרנסנדנטיים, שאינם פתרונות של משוואות כאלה. הידועים שבהם הם e, π, וקשה מאוד למצוא אותם, למרות שיש כל כך הרבה מהם.

ההגדרה המסודרת של הממשיים שמורה למתמטיקאים, אנו נתייחס אליהם כאל נקודות על "ציר המספרים" שאיננו יכולים לאפיין בעזרת הרציונליים. כדי להדגים שאכן יש כאלה, נחשוב על השורש של 2, ונניח בשלילה שהוא רציונלי

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2}$$

כאשר p, q שלמים, ואנו מניחים שהשבר מצומצם לגמרי, כלומר אין להם גורם משותף.

$$p^2 = 2q^2$$

יוצא ש-p^2 זוגי. מסתבר שאם הריבוע של מספר הוא זוגי, גם המספר עצמו זוגי, שאם לא כן

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 \qquad \text{which is odd}$$

ומכאן המסקנה ש-p זוגי, כלומר

$$p = 2k$$

ולכן

$$4k^2 = 2q^2$$
$$2k^2 = q^2$$

כלומר הריבוע של q זוגי ולכן, לפי אותו טיעון q זוגי,

$$q = 2m$$

ומכאן שיש ל-p, q גורם משותף, 2 - וקיבלנו סתירה להנחה שלנו. מכאן ש-$\sqrt{2}$ אינו מספר רציונלי.

1.1.5 ערך מוחלט

הערך המוחלט של מספר הוא

$$|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$$

והוא מקיים את אי שוויון המשולש

$$|a + b| < |a| + |b|$$

1.1.6 קבוצות ותחומים

היכרנו את הקבוצות $\mathbb{NZQR}$. באופן כללי קבוצה היא אוסף של דברים, במקרה שלנו מספרים, למשל

$$A = \{1, 4, 7, \pi, -8, \sqrt{7}\}$$

יש לנו סימונים מיוחדים כגון

$$\begin{aligned} (a, b) &= \{x|a < x < b\} \\ [a, b] &= \{x|a \leq x \leq b\} \\ (a, b] &= \{x|a < x \leq b\} \\ [a, b) &= \{x|a \leq x < b\} \end{aligned}$$

מסמנים שייכות כך

$$\begin{aligned} 1 &\in \mathbb{N} \\ \frac{3}{4} &\in \mathbb{Q} \\ \pi &\in \mathbb{R} \\ \sqrt{2} &\notin \mathbb{Q} \end{aligned}$$

הסמל ∞ מסמן "אינסוף". האינסוף הוא לא מספר

$$\infty \notin \mathbb{R}$$

הוא רעיון שכשמו כן הוא. ברור לנו מהו מספר סופי של דברים. כמה מספרים טבעיים יש כאן

$$\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$$

100 כמובן. כמה מספרים טבעיים יש בכלל,

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

אינסוף.

1.1.7 פונקציות ממשיות

פונקציה היא התאמה

$$f : A \to B$$

ה-A נקרא "תחום" ו-B ה"טווח" (לא כל נקודה ב-B היא דווקא ערך של הפונקציה. הנקודות שכן נקראות "התמונה" של f). שמתאימה לכל $x \in A$ איזה $y \in B$ מסויים. רושמים

$$y = f(x)$$

אנו נדון בדרך כלל בפונקציות ממשיות, כלומר

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

בדרך כלל אנו נגדיר את הפונקציה על ידי נוסחא, למשל

$$f(x) = x^2 + 3x$$

זה אומר שלכל x אנו מתאימים את הערך $x^2 + 3x$

דוגמאות מפיזיקה: לכל ערך של הזמן t אנו מתאימים את המיקום של איזה חלקיק $x(t)$, ואנו אומרים שהמקום הוא "פונקציה של הזמן". באופן דומה, המהירות היא פונקציה של הזמן, או למשל הלחץ הוא פונקציה של הגובה באטמוספירה

$$x = \frac{at^2}{2} + v_0 t$$

$$p(y) = p_0 e^{-y/y_0}$$

יש פונקציות שנתונות על ידי "מקרים"

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ -x & x < 1 \end{cases}$$

דוגמא אחרת היא פונקצית דירישלה

$$D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

1.1.8 תחום ההגדרה הטבעי של פונצקציה

כאשר אנו לא מציינים במפורש את התחום, הכוונה באופן מרומז ל-$\mathbb{R}$ חוץ מאולי כמה נקודות שבהן הנוסחא שמגדירה את הפונקציה לא מוגדרת, למשל

$$f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

לא מוגדרת בנקודה $x = -2$ ולפיכך תחום ההגדרה שלה הוא

$$\mathbb{R} \backslash \{-2\}$$

1.1.9 הרכבת פונקציות

$$f : A \to B, g : B \to C$$

ניתן להגדיר

$$h = g \circ f, h : A \to C$$

כך

$$h(x) = g(f(x))$$

1.1.10 גרפים

מציירים גרף של פונקציה על ידי הכללת כל הנקודות (x, y) שמקיימות $y = f(x)$. את פונקצית דירישלה למשל, לא ניתן לצייר.
הפונקציות המוכרות ביותר לנו הן

$$y = ax + b$$

שהגרף שלה הוא קו ישר, והפונקציה

$$y = ax^2 + bx + c$$

מקובל לבחור באותיות מתחילת הא-ב כדי לייצג קבועים.

1.1.11 רדיאנים

הגדרת הרדיאנים (זווית של רדיאן היא זו שבה אורך הקשת שווה לרדיוס) מאפשרת לנו להגדיר את הפונקציות הטריגונומטריות, במעגל הטריגונומטרי.

$$\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

הגדרות נוספות פחות נפוצות

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

מההגדרה בעזרת המעגל רואים מיד

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

ומכאן מיד

$$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x} \equiv \sec^2 x$$

כמו כן

$$\sin(-x) = -\sin x$$
$$\cos(-x) = \cos x$$

אנו נוכיח בעתיד את הנוסחאות

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

ולפיכך

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$
$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

הפונקציות ההפוכות הן

$$\arcsin x \equiv \sin^{-1} x$$
$$\arccos x = \cos^{-1} x$$
$$\arctan x = \mathrm{tg}^{-1} x$$

1.1.12 חזקות ולוגריתמים

יש לנו את החוקים המוכרים לנו

$$a^m a^n = a^{m+n}$$
$$(a^m)^n = a^{mn}$$

אפשר לתת להם מובן עבור מספרים רציונליים כך

$$a = a^1 = a^{\frac{1}{2}\cdot 2} = \left(a^{1/2}\right)^2$$

לפיכך

$$\sqrt{a} = a^{1/2}$$

באופן כללי

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$$

וכך אנו מגדירים את

$$a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

אז יש לנו הבנה של a^x כאשר $x \in \mathbb{Q}$. האם אפשר להגדיר a^x כאשר $x \in \mathbb{R}$? כן, ואנו ניתן כאן רק אינטואיציה. כל מספר ממשי x מוקף באינסוף רציונליים שמהווים קירוב שלו. לפיכך כדי לקבל שיערוך של a^x נשערך למעשה את a^r כך ש-r הוא מספר רציונלי שקרוב ככל שנרצה ל-x. ככל ש-r קרוב ל-x, כך a^r קרוב ל-a^x. יותר עמוק מזה, לא ניכנס. אם כך, יש לנו את פונקצית החזקה

$$y = a^x$$

שמוגדרת לכל $a > 0$ ולכל x.
הלוגריתם מוגדר על ידי חיפוש הפונקציה ההפוכה לפונקצית החזקה:
עכשיו, אם

$$x = a^y$$

אזי מגדירים

$$y = \log_a x$$

עבור $0 < a \neq 1$. לפי ההגדרה ברור כי

$$x = a^{\log_a x}$$

מתכונות של חזקות

$$xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y}$$
$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

באופן דומה

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

נשים לב שהפונקציה $\log_a x$ מוגדרת רק עבור $a > 0$ ועבור $x > 0$. מדוע? למשל

$$y = (-1)^x$$

לא מוגדרת עבור $x = 1/2$ ולמעשה לא מוגדרת עבור אינסוף מספרים רציונליים. לכן גם הפונקציה ההפוכה, הלוגריתם, לא מוגדרת. ברגע שהבנו זאת, ברור גם ש $\log_a x$ מוגדרת רק עבור x חיובי, כי תמיד a^y יהיה מספר חיובי.

1.1.13 קצת משחקים

1. הפונקציה

$$y = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

לכאורה

$$y = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x - 1$$

אבל למעשה, היא אינה מוגדרת בנקודה $x = -1$. תחום ההגדרה שלה לפיכך

$$\mathbb{R} \backslash \{-1\}$$

2. על ידי התבוננות במעגל אנו יכולים לראות שעבור $0 \le x \le \pi/2$

$$\sin x \le x \le \operatorname{tg} x$$

כמו כן עבור x קטן מספיק

$$\sin x \simeq x \simeq \operatorname{tg} x$$

ההבדלים ביניהם נעשים זניחים.

3. רואים מהמעגל

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

כמו כן

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

4. רואים מהמעגל שהפונקציות $\cos x, \sin x$ מחזוריות, עם מחזור $x = 2\pi$.

5. תחום ההגדרה של $\operatorname{tg} x$ הוא לפיכך

$$\mathbb{R} \backslash \{x | x = n\pi\}$$

1.1.14 הפונקציות האלמנטריות

יש לנו פונקציות בסיסיות שמהן אנו יכולים לבנות פונקציות אחרות בעזרת פעולות החשבון והרכבת פונקציות

$$c, x, \sin x, a^x, \arcsin x, \log_a x$$

ניתן להתייחס גם ל

$$x^\alpha, \cos x, \arccos x$$

כפונקציות אלמנטריות. למעשה כל פונקציה שמתקבלת על ידי מספר סופי של פעולות חשבון והרכבה מפונקציות אלה נקראת "אלמנטרית", למשל

$$x^\alpha = a^{\alpha \log_a x}$$

ולכן היא אלמנטרית. באופן דומה:

$$\cos x = \left(1 - \sin^2 x\right)^{1/2}$$

1.2 גבולות של פונקציות

נביט בפונקציה $y = x^2$. נביט ב"שכונה" של x סביב הנקודה 3,

$$|x-3| < \delta$$

ככל ש-δ קטן יותר, כך ה"שכונה" המתאימה של y סביב 9 קטנה

$$\begin{aligned} |y-9| &= \left|x^2-9\right| \\ &= |(x-3)(x+3)| \\ &= |x-3|\,|x+3| \\ &< \delta\,|x+3| \end{aligned}$$

אנו רואים שה"שכונה" של y סביב 9 קטנה ביחד עם δ. במילים, ככל שניקח נקודות מקובצות סביב $x = 3$ כך יתקבצו ערכי y המתאימים סביב $y = 9$. כאשר זה המצב, אנו אומרים שהגבול של הפונקציה $\lim_{x\to3} x^2 = 9$. ניקח דוגמא אחרת,

$$y = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x \neq 3 \\ 7 & x = 3 \end{cases}$$

בכל הנקודות $x \neq 3$ למעשה הפונקציה היא

$$y = x + 3$$

ברור לפיכך שכאשר נסתכל על נקודות ש"מתקבצות סביב $x = 3$", אבל לא הנקודה $x = 3$ עצמה, ערכי y יתקבצו סביב 6.

$$\lim_{x\to3} y = 6$$

אבל הפונקציה עצמה $y(3) = 7$ לפי ההגדרה. זו דוגמא לפונקציה לא רציפה. מושג הגבול מתייחס רק לסביבה של הנקודה, אך לא לנקודה עצמה. באופן דומה יכולנו להגדיר

$$y = \frac{x^2-9}{x-3}$$

ואז עדיין הגבול שלה ב-$x = 3$ היא 6, למרות שהיא בכלל לא קיימת בנקודה.

1.2.1 הגדרת הגבול

הגדרת הגבול היא

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 : |x-a| < \delta \to |f(x)-L| < \epsilon$$

הבה נוכיח כי הגבול של $y = \frac{x^2-9}{x-3}$ ב-$x = 3$ הוא 6. יהי $\epsilon > 0$. תהיה $\delta > 0$ כך ש-δ > $|x-3|$ > 0. עכשיו

$$y = \frac{x^2-9}{x-3} = x + 3$$

כי תמיד $x \neq 3$ בחישוב הגבול. לכן

$$y - 6 = x - 3$$

ולכן

$$|y - 6| = |x - 3| < \delta$$

לפיכך נבחר $\delta = \epsilon$ וקיבלנו

$$|y - 6| < \epsilon$$

מאחר שתמיד זה יצלית, לכל ϵ, הרי שהוכחנו

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$$

שימו לב איך האינסוף נכנס לתוך ההגדרה של הגבול.

1.2.2 גבולות של פונקציות אלמנטריות

משפט: תהי $f(x)$ פונקציה אלמנטרית המוגדרת בנקודה a, אזי

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

ההוכחה של המשפט הזה ארוכה, ומי שמעוניין יכול לחפש בספרים. נשים לב שהמשפט דורש שהפונקציה תהיה מוגדרת, למשל

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

לא ניתן לחישוב ע"י הצבת $x = 0$ משום ששם הפונקציה לא מוגדרת, וזה למרות ש-$\frac{1}{x}$ ו-$\sin x$ הן פונקציות אלמנטריות.

1.2.3 משפט הסנדוויץ'

משפט: יהיו $f(x), g(x), h(x)$ פונקציות המוגדרות בתחום מסויים, שבו מתקיים

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

וכמו כן מתקיים עבור נקודה בתחום a: $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ אזי

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

הוכחה: ידוע לנו כי עבור ϵ קיים δ כך שעבור

$$|x - a| < \delta$$

מתקיים

$$|h(x) - L| < \epsilon$$
$$|g(x) - L| < \epsilon$$

(למעשה קיימות δ_1, δ_2 ואנו נבחר את הקטנה מביניהן). עכשיו

$$g(x) \le f(x) \le h(x)$$
$$g(x) - L \le f(x) - L \le h(x) - L$$

אבל $|g(x) - L| \le \epsilon$ ו-$|h(x) - L| \le \epsilon$ כלומר

$$-\epsilon < f(x) - L < \epsilon$$

כלומר

$$|f(x) - L| < \epsilon$$

לפיכך

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

1.2.4 חשבון גבולות

אם הגבולות $\lim_{x\to a} f(x) = F, \lim_{x\to a} g(x) = G$ קיימים אזי

$$\lim_{x \to 0} kf(x) = kF$$
$$\lim_{x \to 0} (f(x) \pm g(x)) = F \pm G$$
$$\lim_{x \to a} (f(x)g(x)) = FG$$
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{F}{G}, G \neq 0$$
$$\lim_{x \to 0} [f(x)]^{1/n} = F^{1/n}$$

נוכיח רק אחד מהם, את הסכום. נניח אם כך שהגבולות הנ"ל קיימים, אזי עבור $\epsilon > 0$ יש $\delta > 0$ שעבורו

$$|f(x) - F| \le \frac{\epsilon}{2}$$
$$|g(x) - G| \le \frac{\epsilon}{2}$$

ולכן עבור $|x - a| \le \delta$ מתקיים

$$\begin{aligned}|f(x) + g(x) - (F + G)| &= |f(x) - F + g(x) - G| \\ &\le |f(x) - F| + |g(x) - G| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

כלומר

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = F + G$$

משל.■

1.2.5 קצת גבולות טריגונומטריים

1. נחשב את

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}$$

מהמעגל רואים שעבור $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים

$$\sin\theta<\theta<\operatorname{tg}\theta$$

עבור $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$ יוצא

$$\sin\theta>\theta>\operatorname{tg}\theta$$

נחזור למקרה ש-θ חיובי ונחלק ב-$\sin\theta$

$$1<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{1}{\cos\theta}$$

ואפשר להגיע לאותו אי שוויון בדיוק עבור המקרה של θ שלילי. כלומר

$$\cos\theta<\frac{\sin\theta}{\theta}<1$$

עכשיו ניתן להשתמש במשפט הסנדוויץ'

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=\cos(0)=1,\lim_{\theta\to 0}1=1$$

ולכן

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

2. דוגמא אחרת

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}$$

נניח לרגע כי $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. במקרה כזה ברור כי

$$0\leq\frac{1-\cos\theta}{\theta}$$

מצד שני

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos\theta}{\theta}&=\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\theta(1+\cos\theta)}\\&=\frac{\sin^2\theta}{\theta(1+\cos\theta)}\\&\leq\frac{\sin^2\theta}{\theta}\end{aligned}$$

עכשיו

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin^2\theta}{\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\lim_{\theta\to 0}\sin\theta=1\cdot 0=0$$

קיבלנו

$$0\le\frac{1-\cos\theta}{\theta}\le\frac{\sin^2\theta}{\theta}$$

מה קורה ב-$\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$? במקרה כזה ברור כי

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta}\le 0$$

וגם

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\theta\left(1+\cos\theta\right)}\ge\frac{\sin^2\theta}{\theta}$$

כלומר קיבלנו

$$\frac{\sin^2\theta}{\theta}\le\frac{1-\cos\theta}{\theta}\le 0$$

בשני המקרים הביטוי שלנו חסום על ידי פונקציות ששואפות לאפס ולכן הגבול

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$$

למעשה בלי לשים לב השתמשנו כאן בגבולות חד צדדיים. אולי כדאי שנגדיר אותם

1.2.6 רציפות של פונקציה

פונקציה נקראת רציפה בנקודה a אם ורק אם היא מוגדרת שם וגם

$$f(a)=\lim_{x\to a}f(x)$$

1.2.7 גבולות חד-צדדיים

לפעמים יש טעם להגדיר את הגבול מכל צד של הנקודה $x=a$, כלומר $x\to a^+, x\to a^-$. ההגדרה זהה להגדרת הגבול, אלא שבמקום

$$|x-a|<\delta$$

משתמשים ב-$x-a<\delta$ (זה $x\to a^+$) או $a-x<\delta$ (זה $x\to a^-$). לפונקצית המדרגה למשל

$$\Theta(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\ge 0\end{cases}$$

אין גבול בנקודה $x=0$, אבל יש לה גבולות חד צדדיים.
יש לפונקציה גבול בנקודה אם ורק אם הגבולות החד צדדיים שלה קיימים ושווים.

1.2.8 גבול במובן הרחב

אנו נוסיף עכשיו כמה סוגי גבולות:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists x_0 : x > x_0 \to |f(x) - L| < \epsilon$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\epsilon > 0 \exists x_0 : x < x_0 \to |f(x) - L| < \epsilon$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists\delta : |x - a| < \delta \to f(x) > M$$
$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} \exists\delta : |x - a| < \delta \to f(x) < M$$

באופן דומה אפשר להגדיר גם גבולות מהסוג $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$. למשל אם נביט ב-$y = 1 + \frac{1}{x}$ נראה כי

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$. נביט בהפרש

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1 < \epsilon$$
$$\frac{1}{x} < \epsilon$$
$$x > \frac{1}{\epsilon}$$

לפיכך אם נבחר $x_0 = 1/\epsilon$ אזי עבור כל $x > x_0$ מתקיים $|y(x) - 1| < \epsilon$, זה מוכיח את הטענה עבור $x \to \infty$. באופן דומה עבור x שלילי

$$\left|\left(1 + \frac{1}{x}\right) - 1\right| < \epsilon$$
$$1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right) < \epsilon$$
$$-\frac{1}{x} < \epsilon$$
$$-1 > x\epsilon$$
$$-\frac{1}{\epsilon} > x$$

לפיכך אם נבחר $x_0 = -\frac{1}{\epsilon}$ נקבל $x < x_0$ שגורר $|y(x) - 1| < \epsilon$. מעבר לכך ב-$x \to 0$ יש לנו שני "גבולות" אינסופיים

$$\lim_{x\to 0^\pm}\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \pm\infty$$

וההוכחות דומות.

1.3 נגזרות

1.3.1 פרדוקס החץ

לזנון היו מספר פרדוקסים, שאחד מהם שנזכיר, נקרא פרדוקס החץ. לזנון היה קשה להבין כיצד חץ שנע לעבר המטרה, יכול להמצא באיזושהי נקודה בדרך, וגם לנוע לעבר המטרה באותו זמן. מבחינתו אם החץ תופס מקום כלשהו, זה חייב להיות במנוחה. אנו יכולים להבין זאת אם נדמיין תמונה של החץ בתנועתו - בתמונה שכזו החץ נראה עומד במקום.

למעשה הקושי של זנון היה בהבנת המושג "מהירות רגעית". מהירות היא תמיד יחס של הפרשים

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

אפשר לחשוב על מהירות ממוצעת בין רגעים סמוכים, אבל מה עושים כש-$t_1 = t_2$? הרי במקרה כזה גם $x_1 = x_2$ ולא ברור כיצד לחשוב על הרעיון הזה. אם "מהירות" היא מושג שקיים רק בתנאי שדנים ברגעים שונים, מה נעשה עם ההבנה האינטואיטיבית שלנו של מהירות רגעית?

1.3.2 מהירות

הדרך שלנו להתמודד עם העניין הזה הוא בעזרת הרעיון של גבול. גם אם פונקציה לא מוגדרת בנקודה, עדיין אפשר שיהיה לה גבול בנקודה הזו. לפיכך נגדיר את המהירות הרגעית להיות

$$v = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

או פשוט

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

למשל עבור

$$x = \frac{1}{2}at^2$$

נחשב ונמצא

$$\begin{aligned} \Delta x &= x\left(t + \Delta t\right) - x(t) \\ &= at\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 \end{aligned}$$

אם כך

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = at + \frac{1}{2}a\Delta t$$

ולכן

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \left(at + \frac{1}{2}a\Delta t\right) = at$$

אנו רואים שהמהירות הרגעים משתנה עם הזמן. שוב: למרות שהיחס $\Delta x/\Delta t$ לא קיים עבור רגע אחד (הוא מקבל את הצורה $0/0$), הגבול שלו קיים, וכך אנו מתייחסים בצורה מתמטית לרעיון של שינוי רציף.

1.3.3 הגדרת הנגזרת

למעשה כבר ראינו את הגדרת הנגזרת, רק עכשיו נרשום אותה עם x, y וכמו כן נציג כמה סימונים. נסמן $y = f(x)$ ואז

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x+\Delta x) - y(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\end{aligned}$$

הסימון $\frac{dy}{dx}$ מזכיר לנו את הגדרת הנגזרת, אך יש לשים לב שהוא אינו שבר במובן הרגיל. סימונים שקולים הם

$$f'(x), \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}f(x), f_x$$

ואותם סמלים עם y במקום f.

הנגזרת היא קצב השינוי של y עם x.

אם הנגזרת בנקודה מסויימת קיימת, אומרים שהפונקציה גזירה שם.

1.3.4 חישוב של נגזרות

1. פולינום: נתחיל מלחשב את

$$\frac{d}{dx}x^n$$

זה לא מסובך כאשר משתמשים בבינום של ניוטון:

$$(x+\Delta x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\Delta x^k$$

לפיכך

$$\begin{aligned}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} &= \frac{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\Delta x^k - x^n}{\Delta x}\\ &= \frac{x^n + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\Delta x^k - x^n}{\Delta x}\\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\Delta x^{k-1}\\ &= nx^{n-1} + \sum_{k=2}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\Delta x^{k-1}\end{aligned}$$

כל המחובר השני יעלם בגבול ולכן

$$\frac{d}{dx}x^n=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=nx^{n-1}$$

2. סכום והפרש של נגזרות:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f+g)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f+\Delta g}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}+\frac{\Delta g}{\Delta x}\right)\end{aligned}$$

אם כל הנגזרות קיימות אז לפי חשבון הגבולות שלמדנו

$$\frac{d}{dx}(f+g)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta x}=\frac{df}{dx}+\frac{dg}{dx}$$

ברור שהכלל הזה יפה גם להפרש, כלומר

$$\frac{d}{dx}(f\pm g)=\frac{df}{dx}\pm\frac{dg}{dx}$$

עכשיו אנחנו יכולים לגזור כאלה דברים

$$\frac{d}{dx}\left(x^2+4x^3\right)=2x+12x^2$$

3. נגזרת של מכפלת פונקציות

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x)g(x))&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(f(x)g(x))}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(f+\Delta f)(g+\Delta g)-fg}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\Delta g+g\Delta f+\Delta f\Delta g}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x)\frac{\Delta g}{\Delta x}+g(x)\frac{\Delta f}{\Delta x}+\Delta g\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)\end{aligned}$$

שוב תחת ההנחות שכל הגבולות הנפרדים כאן קיימים

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x))=f(x)\frac{dg}{dx}+g(x)\frac{df}{dx}$$

כי $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta g\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x)\lim_{\Delta x\to 0}\Delta g=0$. הבה נאשש את הנוסחא הזו קצת, למשל

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(x^3\right)&=x\frac{d}{dx}\left(x^2\right)+x^2\frac{d}{dx}(x)\\&=x\cdot 2x+x^2=3x^2\end{aligned}$$

ושחזרנו את התוצאה המוכרת לנו.

4. באופן דומה מוכיחים את

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)\frac{df}{dx} - f(x)\frac{dg}{dx}}{g^2(x)}$$

5. נגזרת של הפונקציה ההפוכה: אם יש לנו

$$y = f(x)$$

לעיתים ניתן להפוך את הקשר ולקבל את

$$x = f^{-1}(y)$$

מה תהיה הנגזרת $\frac{dx}{dy}$ במקרה כזה? נניח ש-$f(x)$ הפיכה וגזירה בסביבה של הנקודה x_0, אם $f'(x_0) \neq 0$ אזי בנקודה המתאימה: $\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y_0} = \frac{1}{(dy/dx)_{x_0}}$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x/\Delta y}\\ &= \frac{1}{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}}\end{aligned}$$

בהנחה שהגבול במכנה קיים. מאחר ש-$y = f(x)$ גזירה ומכיוון ש-$f'(x_0) \neq 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x = f'(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$$

כלומר

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}} = \frac{1}{dx/dy}$$

כמובן בתנאי ש-$dy/dx \neq 0$ וגם $dx/dy \neq 0$.

6. דוגמא לגזירה של פונקציה הפוכה:

$$y = \sqrt{x}$$

נביט ב-

$$\begin{aligned}x &= y^2\\ \frac{dx}{dy} &= 2y = 2\sqrt{x}\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{dx/dy} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

7. נגזרת של הלוגריתם

$$y = \log_a x$$

מה הנגזרת שלו?

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\log_a (x+\Delta x) - \log_a x}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \log_a \frac{x+\Delta x}{x} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \end{aligned}$$

כלומר

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

עכשיו

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

הקיום של הגבול הזה תלוי רק בלוגריתם, משום שהגבול של $1/x$ בוודאי קיים לכל x רלוונטי

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x}$$

הלוגריתם הוא פונקציה אלמנטרית - לכן אנו יודעים שמתקיים

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a (\ldots) &= \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{x/\Delta x} \\ &= \log_a \lim_{l \to 0} (1 + l)^{1/l} \end{aligned}$$

בתנאי שהגבול האחרון קיים. לא נוכיח זאת כאן, אבל מסתבר שהוא קיים ויש לו שם מיוחד

$$e = \lim_{l \to 0} (1+l)^{1/l} \simeq 2.718$$

לפיכך

$$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e$$

זה נעשה פשוט במיוחד במקרה $a = e$ ואז

$$\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

8. נגזרת של האקספוננט:

$$y = e^x$$

אנו יודעים

$$x = \ln y$$

ויודעים כבר

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y}$$

לפיכך

$$\frac{dy}{dx} = y$$

כלומר

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x$$

9. כלל השרשרת: נניח שיש לנו תלות מהצורה

$$y = f(g(x))$$

למשל

$$y = \sqrt{1+x^2}$$

אפשר להביט כאן על $g(x) = x^2$ ועל $f(x) = \sqrt{1+x}$ לפיכך $y = f(g(x)) = \sqrt{1+x^2}$. כלל השרשרת מאפשר לנו להתמודד עם דברים כאלה בקלות. הטענה היא שאם

$$y = f\left(g(x)\right)$$

אזי

$$\frac{dy}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

הוכחה: יהי $\epsilon > 0$, אזי קיים $\delta > 0$ שעבורו כאשר $\Delta x < \delta$ מתקיים

$$\Delta g = g'(x)\Delta x + \eta\Delta x$$
$$\Delta f = f'(g)\Delta g + \theta\Delta g$$

כאשר $\lim_{\Delta x\to 0}\{\theta,\eta\}=0$. זה חייב להיות כך כי למשל

$$\eta=\frac{\Delta g}{\Delta x}-g'(x)$$

יוצא

$$\begin{aligned}\Delta f&=f'(g)\Delta g+\theta\Delta g\\&=f'(g)\left(g'(x)\Delta x+\eta\Delta x\right)+\theta\left(g'(x)\Delta x+\eta\Delta x\right)\\&=f'(g)g'(x)\Delta x+\Delta x\left\{\eta f'(g)+\theta g'(x)+\eta\theta\right\}\end{aligned}$$

מכאן

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(g)g'(x)+\left\{\eta f'(g)+\theta g'(x)+\eta\theta\right\}$$

אבל

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(g)g'(x)$$

מאחר ש-η,θ שואפות לאפס כאשר Δx שואף לאפס. קיבלנו

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

כמובן שניתן להמשיך

$$\frac{df}{dx}=\frac{df}{dg}\frac{dg}{dh}\frac{dh}{dx}$$

וכן הלאה.

10. דוגמא לכלל השרשרת:

$$\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2}=?$$

נסמן $u=1+x^2$ ונקבל

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2}&=\frac{d}{dx}\sqrt{u}=\frac{d}{du}\sqrt{u}\frac{du}{dx}\\&=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{u}}\\&=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\end{aligned}$$

11. עוד דוגמא לכלל השרשרת

$$y=a^x=e^{x\ln a}$$

לפיכך נסמן $u = x\ln a$ ונקבל

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}a^x = \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\\ &= e^u \cdot \ln a\\ &= e^{x\ln a}\ln a\\ &= a^x \ln a\end{aligned}$$

12. בעזרת כלל השרשרת אפשר עכשיו להוכיח

$$\begin{aligned}y &= x^\alpha\\ \ln y &= \alpha \ln x\\ \frac{d}{dx}\ln y &= \alpha\frac{d}{dx}\ln x\\ \frac{d}{dy}\ln y\cdot\frac{dy}{dx} &= \frac{\alpha}{x}\\ \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} &= \alpha x^{-1}\\ \frac{dy}{dx} &= \alpha y x^{-1}\\ &= \alpha x^{\alpha-1}\end{aligned}$$

כלומר

$$\frac{d}{dx}x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$

לכל מספר ממשי. בעזרת זה אפשר למשל להבין את

$$\frac{d}{dx}\sqrt{x} = \frac{d}{dx}x^{1/2} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

שכבר ראינו, בדרך אחרת.

13. נגזרת של $\sin x$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin x}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left\{-\sin x\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}+\cos x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right\}\\ &= -\sin x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1-\cos\Delta x}{\Delta x}+\cos x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\\ &= -\sin x\cdot 0+\cos x\cdot 1\\ &= \cos x\end{aligned}$$

בעזרת הגבולות שהוכחנו כבר. את הנגזרת של $\cos x$ אפשר לחשב עכשיו בעזרת

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

נגזור לפי x ונקבל

$$2\cos x \frac{d}{dx}\cos x + 2\sin x \cos x = 0$$
$$\cos x \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x \cos x$$

כל עוד $\cos x \neq 0$:

$$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

מסתבר שנוסחא זו נכונה גם בנקודות בהן $\cos x = 0$, כפי שאפשר לקבל באופן מפורש ע"י הגדרת הגבול, בדומה לאיך שעשינו את $\sin x$.

בזאת סיימנו את הנגזרות של כל הפונקציות האלמנטריות.

1.3.5 עוד חישובי נגזרות

1. $y = x^x$ למשל.

$$\begin{aligned}
\ln y &= x \ln x \\
y^{-1}\frac{dy}{dx} &= \ln x + x\frac{1}{x} \\
&= \ln x + 1 \\
\frac{dy}{dx} &= y\left(\ln x + 1\right) \\
&= x^x\left(\ln x + 1\right) \\
\frac{d}{dx}x^x &= x^x\left(\ln x + 1\right)
\end{aligned}$$

2. $y = e^{x^2}$ למשל:

$$\begin{aligned}
y &= e^{x^2} \\
\ln y &= x^2 \\
\frac{1}{y}y' &= 2x \\
y' &= 2yx \\
&= 2e^{x^2}x
\end{aligned}$$

דרך אחרת

$$\begin{aligned} u &= x^2 \\ y &= e^{x^2} = e^u \\ y' &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\ &= e^u \cdot 2x \\ &= 2e^{x^2}x \end{aligned}$$

3. למשל $y = \frac{1+x}{x^2}$

$$\begin{aligned} y &= \frac{u}{v}, u = 1 + x, v = x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{u'v - v'u}{v^2} \\ &= \frac{x^2 - 2x\left(1 + x\right)}{x^4} \\ &= \frac{-2x - x^2}{x^4} \\ &= \frac{-2 - x}{x^3} = -\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

4. נגזרת של $\operatorname{tg} x$

$$\begin{aligned} y &= \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \ln y &= \ln \sin x - \ln \cos x \\ \frac{1}{y}y' &= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} \\ y' = \frac{d}{dx}\operatorname{tg} x &= \frac{\operatorname{tg} x}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{\sin x}{\sin x \cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \end{aligned}$$

אפשר את אותה תוצאה לקבל כמובן מהנוסחא של נגזרת של מנה, אבל זה נדוש.
כדאי לזכור אגב

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

5. נגזרת של $\arcsin x$. ניקח את ההגדרה

$$y = \arcsin x, \qquad x \in [-1,1], y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

במקרה כזה $\cos y \geq 0$ ולכן

$$\begin{aligned} y &= \arcsin x x \in \\ x &= \sin y \\ \frac{dx}{dy} &= \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} \\ &= \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

כלומר

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

באופן דומה

$$\frac{d}{dx}\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

הדבר מרמז על הקשר $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$.

6. עוד דוגמא

$$\begin{aligned} y &= \arctan x \\ x &= \operatorname{tg} y \\ \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx}\arctan x &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

7. הפונקציות ההיפרבוליות, כדאי להכיר $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), \sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$.
הן מקיימות

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

מיד רואים

$$\frac{d}{dx}\cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx}\sinh x = \cosh x$$

כמו כן

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

וגם

$$\frac{d}{dx}\tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

1.3.6 דיפרנציאל וקירוב ליניארי

בהנתן פונקציה גזירה בנקודה x נביט בהפרש

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x \cdot f'(x) + \Delta x \cdot \epsilon$$

כאשר ϵ הולך לאפס עם Δx. מכיוון שכך, עבור Δx קטן מספיק,

$$f(x+\Delta x) - f(x) \simeq \Delta x \cdot f'(x)$$

עכשיו נגדיר

$$df = \Delta x \cdot f'(x)$$

זה ההפרש בפונקציה אילו היא היתה "ממשיכה ישר" מאותה נקודה. מגדירים את $dx \equiv \Delta x$ במקרה הזה ורושמים

$$df = f'(x)dx$$

כמובן שאם כך,

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

וגם

$$df = \frac{df}{dx}dx$$

צריך לשים לב לסמנטיקה. אם כן הדיפרנציאל הוא משהו סופי - הוא החלק הלינארי של קירוב עבור הפונקציה.

דרך אחרת להגדיר את הנגזרת היתה לדרוש שאפשרי לבצע קירוב ליניארי שכזה, למשל

$$f(x+h) - f(x) = A \cdot h + \epsilon h$$

כאשר $\epsilon \to 0$ עם h. אם זה המצב אז מיד

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = A(x) + \epsilon$$

ובגבול $h \to 0$

$$f'(x) = A(x)$$

דרך אחרת היא לשים לב ש-

$$A + \epsilon = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

היא פונקציה $A+\epsilon = \varphi(x,h)$ שעוברת ל-$A(x)$ בגבול $h \to 0$, כלומר אנו נגיד שפונקציה היא גזירה אסם קיימת $\varphi(x,h)$, רציפה כפונקציה של h בנקודה $h = 0$ כך שבקירוב טוב

$$f(x+h) - f(x) = h \cdot \varphi(x,h)$$

אנו נשתמש ברעיון הזה מאוחר יותר בקורס, כשנדבר על דיפרנציאלים של פונקציות מרובות משתנים. שימוש של קירוב ליניארי הוא למשל לצורך חישוב

$$\sqrt{1.1} = ?$$

נגדיר $f(x) = \sqrt{x}$ הנגזרת היא $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ונביט בערכים בנקודה 1

$$f(1) = 1, f'(1) = \frac{1}{2}$$

לכן

$$\begin{aligned} \sqrt{1.1} &\simeq f(1+0.1) = f(1) + df \\ &= f(1) + f'(1)dx \end{aligned}$$

כאשר $dx = 0.1$ ולכן

$$\sqrt{1.1} \simeq 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 = 1 + 0.05 = 1.05$$

הערך האמיתי הוא 1.0488, טעינו בעשירית אחוז בלבד. עוד דוגמא: $e^{0.1}$ מהו?

$$\begin{aligned} e^{0.1} &\simeq e^0 + dx \left(\frac{de^x}{dx}\right)_{x=0} \\ &= 1 + dx \cdot e^x|_{x=0} \\ &= 1 + dx \\ &= 1 + 0.1 = 1.1 \end{aligned}$$

הערך המדוייק הוא 1.1052, והטעות היא פחות מחצי אחוז.

1.3.7 משפט רול ומשפט ערך הביניים

לפי משפט רול, אם יש לנו פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה בקטע (a,b), וכמו כן $f(a) = f(b) = 0$ אזי יש נקודה $a < \xi < b$ כך ש-

$$f'(\xi) = 0$$

הוכחה סכמטית: הפונקציה רציפה ומתאפסת בין שני הקצוות. לפיכך יש לפונקציה מקסימום אחד לפחות ומינימום אחד לפחות בקטע. תהי ξ נקודת המקסימום[2]. אזי המנה

$$f'(\xi) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \geq 0$$
$$f'(\xi) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(\xi+h)-f(\xi)}{h} \leq 0$$

אבל ידוע שהפונקציה גזירה, לכן שני הגבולות האלה שווים ולפיכך

$$f'(\xi) = 0$$

זה משפט רול. ממנו נובע מיד משפט ערך הביניים: תהי פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ וגזירה ב-(a,b) אזי קיימת $a<\xi<b$ כך ש

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

הוכחה: תהי

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{x-a}{b-a}\left(f(b)-f(a)\right)$$

היא רציפה וגזירה ומתאפסת ב-a,b לכן לפי משפט רול יש נקודה שבה נגזרתה מתאפסת

$$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

כלומר

$$\varphi'(\xi) = 0 = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$$

מ.ש.ל.

[2] זה אחד הדברים הכי פחות מובנים מאיליהם, אבל לא נרחיב כאן מפאת קוצר היריעה

פרק 2

אינטגרלים

2.1 אינטגרל מסויים

נניח שאני רוצה לדעת מהו השטח של עיגול? אני יכול לחפש את השטח מתחת לגרף

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}$$

זה מוביל אותנו למוטיבציה לחשב שטח מתחת לגרף של פונקציה.

תהי $f(x)$ פונקציה ונניח לעת עתה $f(x) > 0$, אנו רוצים לחשב את השטח מתחת לגרף שלה בין הנקודה a לנקודה b. נסמן את השטח הזה ב-S. כיצד נגיע ל-S הזה? אנו יודעים לחשב רק שטח של מלבן (מקסימום טרפז). אפשר לחלק את הקטע (a, x) ל-n חלקים ולקבל

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i \\ x_0 &\equiv a \\ x_n &\equiv b \\ \Delta x_i &= x_i - x_{i-1} \end{aligned}$$

ככל שמחלקים ליותר חלקים יותר קטנים, הסכום הזה (אולי) מתקרב לאיזה גבול

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

לזה אנחנו קוראים האינטגרל המסויים של הפונקציה $f(x)$ מ-a עד b, ומסמנים

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

ואנו לא נוכיח, שהרי זה אי אפשר, אלא נגדיר שזה השטח. ה-$f(x)$ נקרא ה"אינטגרנד" ו-x נקרא "משתנה האינטגרציה". אבל מה שהגדרנו הוא יותר כללי, כי אפשר להגדיר

אותו גם עבור ערכים שליליים של הפונקציה, ואפילו עבור Δx_i שליליים. למשל, הנחנו $a < b$ אבל אם נרשה גם $b < a$ נקבל שאפשר להגדיר את אותו הדבר, רק שה-$\Delta x_i < 0$, ולפיכך

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

כמו כן מיד רואים מההגדרה

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

כמו כן קל לראות

$$\int_a^b \left(\psi(x) + \phi(x)\right) dx = \int_a^b \psi(x)dx + \int_a^b \phi(x)dx$$

וגם

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

צריך בעקרון לדון ולהראות שהאינטגרל לא תלוי בצורת החלוקה שבחרנו.

2.1.1 דוגמא פשוטה של אינטגרל מסויים בחישוב ישיר

הבה נחשב את $\int_0^a xdx$ בעזרת חלוקה לקטעים באורך שווה

$$\int_0^a xdx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n x_i \Delta x_i$$

יש לנו $\Delta x_i = \frac{a}{n}$ וגם $x_i = i\frac{a}{n}$ כלומר

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a}{n} \sum_i \frac{a}{n} i &= a^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \\ &= a^2 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{a^2}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} \\ &= \frac{a^2}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{a^2}{2} \cdot 1 = \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

זה באמת שטח המשולש.

2.2 אינטגרל לא מסויים והקשר בין אינטגרל לנגזרת

הבה נסתכל על הפונקציה הבאה

$$\Phi(x) = \int_a^x f(u)du$$

ונניח ש-$f(x)$ רציפה. ננסה לגזור את הפונקציה הזו

$$\frac{d\Phi}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}$$

עכשיו

$$\Phi(x+h)-\Phi(x) = \int_x^{x+h} f(u)du$$

כלומר

$$\Delta\Phi = \lim_{n\to\infty} \sum_i f(u_i)\Delta u_i$$

תהי $x_{\min}$ זה שעבורו $f(x)$ מינימלית, כלומר $f(x_{\min}) \le f(\xi), \xi \in (x, x+h)$, ובאופן דומה נגדיר את $x_{\max}$, אזי תמיד

$$\sum_i f(x_i)\Delta x_i \le f(x_{\max}) \sum_i \Delta u_i = f(x_{\max})h$$

ובאופן דומה $f(x_{\min})h \le \sum_i f(u_i)\Delta u_i$ ולכן

$$hf(x_{\min}) \le \sum_i f(u_i)\Delta u_i \le hf(x_{\max})$$

$$f(x_{\min}) \le \frac{1}{h}\sum_i f(u_i)\Delta u_i \le f(x_{\max})$$

ניקח עכשיו את $n\to\infty$ ונקבל

$$f(x_{\min}) \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du \le f(x_{\max})$$

ועכשיו, כאשר $h\to 0$, בגלל ש-$f(x)$ רציפה, שני הערכים, המקסימלי והמינימלי, שוא-פים לאותו ערך, ולכן אפשר לקחת לפי כלל הסנדביץ' את הגבול ולקבל

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(u)du = \frac{d\Phi}{dx} = f(x)$$

כלומר

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x)$$

למעשה כבר ראינו קודם

$$\Phi(x) = \int_0^x udu = \frac{1}{2}x^2$$

2.3 פונקציה קדומה

כאשר $f(x) = \frac{d\Phi}{dx}$ אנו אומרים ש-Φ היא פונקציה קדומה של x. מסתבר שכל פונקציה קדומה אחרת של $f(x)$ קשורה לזו שאנו מכירים על ידי תוספת של קבוע. הוכחה: נניח שלא ונגדיר

$$G(x) = F(x) - \Phi(x)$$

אזי

$$G'(x) = f(x) - f(x) \equiv 0$$

אם הנגזרת של פונקציה היא אפס בכל נקודה, הפונקציה קבועה, לפי משפט ערך הביניים

$$G(x_2) - G(x_1) = (x_2 - x_1) \cdot G'(c) = 0$$

כלומר $G(x_1) = G(x_2)$ כלומר קבועה.

פונקציה קדומה נקראת גם אינטגרל לא מסויים,

$$F(x) = \int f(x)dx \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

2.4 חישוב של אינטגרלים מסויימים בעזרת פונקציות קדומות

נחזור ל-$\Phi(x) = \int_a^x du f(u)$. הבנו שאם יש $F(x)$ קדומה של f אזי

$$\Phi(x) = F(x) + c$$

ומאחר ש-$\Phi(a) = 0$ מסתבר

$$F(a) = -c$$

כלומר

$$\Phi(x) = F(x) - F(a)$$

או

$$\Phi(b) = F(b) - F(a)$$

או

$$\int_a^b f(u)du = F(b) - F(a)$$

מסמנים גם כך

$$\int_a^b f(u)du = F(x)|_a^b$$

במילים אחרות, אם יש לנו פונקציה קדומה כלשהיא, ניתן לחשב בעזרתה את האינטגרלים המסויימים. שוב הדוגמא שראינו

$$\int_0^a xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a = \frac{a^2}{2}$$

2.5 המשפט היסודי של הטבע

התוצאות האלה

$$\boxed{\frac{d}{dx}\int_a^x f(u)du = f(x), \qquad \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$$

הן מה שנקרא "המשפט היסודי של הטבע".

2.6 האינטגרל הוא פעולה ליניארית

די פשוט להבין כי

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad \int \left(f(x) \pm g(x)\right) dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

כמובן בהנחה שכל האינטגרלים כאן קיימים.

2.7 אינטגרביליות

פונקציה היא אינטגרבילית אם היא

1. רציפה (על זה הסתמכנו כשהוכחנו).
2. רציפה למקוטעין (כלומר בעלת מספר סופי של נקודות אי רציפות מסוג "קפיצה סופית").

יש עוד פרטים שאפשר להכנס אליהם - אבל אנחנו לא נעשה זאת.

2.8 חישובי אינטגרלים

2.8.1 אינטגרלים מיידיים

בניגוד לחישוב נגזרת, חישוב האינטגרל של פונקציה אינו פשוט כל כך, ודורש מלאכה של ניחושים וטכניקות. עם זאת, יש לנו כמה מקרים פשוטים,

$$\int \cos x dx = \sin x \qquad \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int dx\, x^\alpha = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$\int dx\, e^x = e^x$$

2.8.2 החלפת משתנים

1. נניח שיש לנו פונקציה $u = u(x)$ שהיא הפיכה, ונביט באינטגרל מהצורה

$$F(x) = \int dx\, f[u(x)]$$

אז מן הסתם,

$$\frac{dF}{dx} = f[u(x)]$$

אפשר להסתכל אבל על F כפונקציה של u, אבל בעזרת כלל השרשרת

$$\begin{aligned}\frac{dF}{du}\frac{du}{dx} &= f[u(x)] \\ \frac{dF}{du} &= f[u(x)]\frac{dx}{du}\end{aligned}$$

כלומר

$$F(u) = \int f[u(x)]\frac{dx}{du}du$$

על הדרך השתמשנו ב-$du/dx = \frac{1}{du/dx}$ כלומר זה יעבוד עבור טרנספורמציה הפיכה. לדוגמא, נחשב שטח של עיגול[1]

$$\int \sqrt{R^2 - x^2}dx$$

נרשום

$$x = R\sin\theta$$

ונקבל

$$dx = R\cos\theta d\theta$$

כאשר x הולך מ-$-R$ אל R אז θ ילך מ-$-\frac{\pi}{2}$ ל-$\frac{\pi}{2}$:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{R^2 - x^2}dx &= \int \sqrt{R^2\left(1 - \sin^2\theta\right)} \cdot R\cos\theta d\theta \\ &= R^2\int \sqrt{\cos^2\theta}\cos\theta d\theta \\ &= R^2\int \cos^2\theta d\theta\end{aligned}$$

את זה פותרים עם הזהות

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(\cos 2\theta + 1\right)$$

[1] זו דרך אידיוטית לחשב שטח של עיגול אבל מילא

כלומר

$$R^2\frac{1}{2}\int d\theta\left(1+\cos 2\theta\right)=\frac{R^2}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]$$

עכשיו נתרגם חזרה ל-x.

$$\theta=\arcsin\frac{x}{R}$$

ונקבל

$$\begin{aligned}\frac{R^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{R}+\sin\theta\cos\theta\right] &= \frac{R^2}{2}\left[\arcsin\frac{x}{R}+\frac{x}{R}\sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}}\right]\\ &= \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R}+\frac{x}{2}\sqrt{R^2-x^2}\end{aligned}$$

בשביל שטח של עיגול אנו צריכים

$$\begin{aligned}2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2} &= \left\{R^2\arcsin\frac{x}{R}+x\sqrt{R^2-x^2}\right\}_{-R}^{R}\\ &= R^2\arcsin 1-R^2\arcsin\left(-1\right)\\ &= R^2\frac{\pi}{2}-R^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ &= R^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\pi R^2\end{aligned}$$

זה נקרא הצבה טריגונומטרית.

2. דוגמא נוספת

$$\int\frac{dx}{x\left(\ln x\right)^{\alpha}}$$

נשים לב $\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x}$ כלומר $u=\ln x$ וקיבלנו $du=\frac{1}{x}dx$ כלומר

$$\int\frac{du}{u^{\alpha}}=\int u^{-\alpha}du=\frac{u^{1-\alpha}}{1-\alpha}=\frac{\left(\ln x\right)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

3. עוד דוגמא

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(1+^3\sqrt{x}\right)}$$

נבחר $x = t^6$ וקיבלנו $dx = 6t^5 dt$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{6t^5 dt}{t^3\left(1+t^2\right)} &= \int \frac{6t^2 dt}{1+t^2} \\
&= 6\int \frac{1+t^2-1}{t^2+1} dt \\
&= 6\int dt\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right) \\
&= 6\left(t-\arctan t\right) \\
&= 6\left(x^{1/6}-\arctan x^{1/6}\right)
\end{aligned}$$

4. עוד הצבה טריגונומטרית

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} = ?$$

נזכור כי $\frac{d}{d\theta}\operatorname{tg}\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} = 1+\operatorname{tg}^2\theta$ ונציב

$$\begin{aligned}
x &= 2\operatorname{tg}\theta \\
dx &= \frac{2d\theta}{\cos^2\theta}
\end{aligned}$$

וקיבלנו

$$\begin{aligned}
\int \frac{2d\theta}{\cos^2\theta}\frac{1}{4\operatorname{tg}^2\theta}\frac{1}{\sqrt{4\left(1+\operatorname{tg}^2\theta\right)}} &= \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\cos^2\theta\operatorname{tg}^2\theta\frac{1}{\cos\theta}} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{\cos\theta\operatorname{tg}^2\theta} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{\cos\theta d\theta}{\cos^2\theta\operatorname{tg}^2\theta} \\
&= \frac{1}{4}\int \frac{d\left(\sin\theta\right)}{\sin^2\theta} \\
&= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sin\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{4\sin\theta}
\end{aligned}$$

עכשיו לפי משולש שבו $x = 2\operatorname{tg}\theta$ כלומר $\operatorname{tg}\theta = x/2$ אפשר להגיע מיד להצבה הנכונה $\sin\theta = \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$ כלומר

$$-\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x}$$

2.8.3 אינטגרציה בחלקים

הבה נשתמש בדיפרנציאלים

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(uv) &= u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} \\
uv = \int dx \frac{d(uv)}{dx} &= \int \left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right) dx \\
&= \int (udv + vdu) \\
&= \int udv + \int vdu
\end{aligned}
$$

ומכאן

$$
\int udv = uv - \int vdu
$$

1. למשל

$$
\int xe^x dx
$$

נניח $u = e^x, du = e^x dx$ וקיבלנו

$$
\begin{aligned}
\int xdu &= ux - \int u \cdot dx \\
&= e^x x - \int e^x dx \\
&= e^x x - e^x \\
&= e^x (x-1)
\end{aligned}
$$

2. דוגמא אחרת

$$
\begin{aligned}
\int dx \ln x &= x \ln x - \int xd(\ln x) \\
&= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} \\
&= x \ln x - \int dx \\
&= x \ln x - x
\end{aligned}
$$

3. עוד אחד

$$\begin{aligned}\int d\theta\cos^3\theta &= \int\cos^2\theta\cdot\cos\theta d\theta\\ &= \int\left(1-\sin^2\theta\right)\cos\theta d\theta\\ &= \int\left(1-\sin^2\theta\right)d\left(\sin\theta\right)\\ &= \sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\end{aligned}$$

2.8.4 אינטגרציה של פונקציות רציונליות

פונקציה רציונלית היא יחס של שני פולינומים

$$f(x)=\frac{\sum_{i=1}^n a_ix^i}{\sum_{j=1}^m b_jx^j}$$

משהו כזה. מסתבר שאם המכנה מדרגה גבוהה יותר של המונה, אז יש פירוק למה שנקרא "שברים חלקיים", כלומר איברים מהצורה

$$\frac{A}{ax+b},\quad\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

כאשר החלקים הריבועיים הם ללא שורשים (ממשיים). דוגמא

$$\int\frac{(x+1)\,dx}{x^3+x^2-6x}$$

המכנה הוא

$$x\left(x^2+x-6\right)$$

ובגלל ש-$\Delta=1+24=25$ מקבלים

$$x=\frac{-1\pm5}{2}\in\{-3,2\}$$

כלומר

$$\frac{x+1}{x\,(x+3)\,(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2}$$

איך מוצאים את המקדמים? מכפילים:

$$\begin{aligned}x+1 &= A\,(x+3)\,(x-2)+Bx\,(x-2)+Cx\,(x+3)\\ &= A\left(x^2+x-6\right)+B\left(x^2-2x\right)+C\left(x^2+3x\right)\\ &= (A+B+C)\,x^2+x\,(A-2B+3C)-6A\end{aligned}$$

מכאן (השוואת מקדמים)

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A-2B+3C &= 1 \\ -6A &= 1 \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{6} \\ B+C &= \frac{1}{6} \\ 3C-2B &= \frac{7}{6} \end{aligned}$$

מכאן $A=-\frac{1}{6}, B=-\frac{2}{15}, C=\frac{3}{10}$ כלומר

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} &= -\frac{1}{6x}-\frac{2}{15\left(x+3\right)}+\frac{3}{10\left(x-2\right)} \\ \int\frac{dx\left(x+1\right)}{x^3+x^2-6x} &= -\frac{1}{6}\ln|x|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+\frac{3}{10}\ln|x-2| \\ &= \ln\frac{|x-2|^{3/10}}{|x|^{1/6}|x+3|^{2/15}} \end{aligned}$$

וזהו.

מה עושים כשהדרגה של המונה גבוהה משל המכנה? בשביל זה יש מה שנקרא "חילוק פולינומים". למשל,

$$\frac{3x^3-5x^2-x+8}{x-2}=3x^2+x+1+\frac{10}{x-2}$$

האלגוריתם למעשה זהה לזה של חילוק ארוך.

מה עושים כשיש שורשים שחוזרים על עצמם? למשל

$$\int dx\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}$$

נשים לב ש:

$$\begin{aligned} x^3-x^2-x+1 &= x^2\left(x-1\right)-\left(x-1\right) \\ &= \left(x-1\right)\left(x^2-1\right) \\ &= \left(x-1\right)^2\left(x+1\right) \end{aligned}$$

כלומר השורש $x=1$ מופיע פעמיים. הפירוק במקרה כזה הוא

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{3x+5}{\left(x-1\right)^2\left(x+1\right)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{\left(x-1\right)^2}+\frac{C}{x+1}$$

מכאן

$$\begin{aligned}
3x+5 &= A\left(x^2-1\right)+B\left(x+1\right)+C\left(x-1\right)^2 \\
&= A\left(x^2-1\right)+B\left(x+1\right)+C\left(x^2-2x+1\right) \\
&= x^2\left(A+C\right)+x\left(B-2C\right)+B-A+C
\end{aligned}$$

לפיכך

$$\begin{aligned}
A+C&=0\\
B-2C&=3\\
C+B-A&=5
\end{aligned}$$

כלומר $A=\frac{1}{2}, C=-\frac{1}{2}, B=4$:

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}=\frac{1}{2\left(x-1\right)}+\frac{4}{\left(x-1\right)^2}-\frac{1}{2\left(x+1\right)}$$

ולכן

$$\begin{aligned}
\int dx\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} &= \int dx\left\{\frac{1}{2\left(x-1\right)}+\frac{4}{\left(x-1\right)^2}-\frac{1}{2\left(x+1\right)}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|x-1\right|-\frac{4}{x-1}-\frac{1}{2}\ln\left|x+1\right| \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|-\frac{4}{x-1}
\end{aligned}$$

2.8.5 פונקציות רציונליות של $\sin x, \cos x$

למשל

$$\int\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}$$

ניתן להציב

$$z=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

במקרה כזה

$$\begin{aligned}
\frac{dz}{dx}&=\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\left(1+z^2\right)\\
\frac{dx}{dz}&=\frac{2}{1+z^2}\\
dx&=\frac{2dz}{1+z^2}
\end{aligned}$$

חוץ מזה

$$\begin{aligned}\cos x &= 2\cos^2\frac{x}{2}-1\\ &= 2\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}-1\\ &= \frac{2}{1+z^2}-1=\frac{1-z^2}{1+z^2}\end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned}\sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\\ &= 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}\\ &= \frac{2z}{1+z^2}\end{aligned}$$

קיבלנו

$$\int\frac{dx}{1+\sin x-\cos x}=\int\frac{2dz}{1+z^2}\frac{1}{1+\frac{2z}{1+z^2}-\frac{1-z^2}{1+z^2}}=\int\frac{2dz}{1+z^2+2z-1+z^2}=\int\frac{2dz}{2z^2+2z}=\int\frac{dz}{z\left(z+1\right)}=$$

2.8.6 אינטגרלים לא אמיתיים

אינטגרנד לא חסום

נתחיל בדוגמא

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}$$

עבור $\alpha>0$. האינטגרנד לא חסום בתחום, ולמעשה לא קיים בנקודה 0. מה עושים? אם ניקח אינטגרל קצת אחר

$$\int_\epsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\int_\epsilon^1 dx\,x^{-\alpha}=\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_\epsilon^1=\frac{1-\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha},\alpha\neq 1$$

עכשיו, אם $\alpha<1$ אז החזקה שם חיובית ואז

$$\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha},\qquad 0<\alpha<1$$

אם $\alpha>1$, החזקה של ϵ שלילית והגבול $\epsilon\to 0^+$ לא קיים. לפיכך אנו לוקחים את הגבול הזה כהגדרה של האינטגרל הזה

$$\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha}\equiv\lim_{\epsilon\to 0^+}\int_\epsilon^1\frac{dx}{x^\alpha}$$

אגב, במקרה $\alpha = 1$ אנו מקבלים $\int_\epsilon^1 x^{-1}dx = \ln\frac{1}{\epsilon} = -\ln\epsilon$ שהגבול שלו $\epsilon \to 0^+$ גם לא קיים.
דוגמא אחרת:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

שוב האינטגרנד לא קיים ב-1, ולכן נגדיר אותו כך

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\int_0^{1-\epsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\epsilon\to 0^+}\arcsin x|_0^{1-\epsilon}$$
$$= \lim_{\epsilon\to 0^+}\arcsin(1-\epsilon) = \frac{\pi}{2}$$

גבולות אינטגרציה אינסופיים

אנו רוצים לדון באינטגרלים מהצורה $\int_{-\infty}^{\infty}, \int_{-\infty}^{a}, \int_a^{\infty}$. בכל מקרה נגדיר אותם כגבול של אינטגרלים רגילים,

$$\int_a^\infty f(x)dx \equiv \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

באופן דומה עבור $\int_{-\infty}^a$. אם יש אינסוף משני הצדדים, ההגדרה היא

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^\infty f(x)dx$$

אם שני האינטגרלים מאגף ימין קיימים - יוצא שזה לא תלוי בבחירה של a.
דוגמא

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx + \int_0^\infty e^{-x}dx$$

עכשיו

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = e^x|_{-\infty}^0 = \lim_{u\to-\infty}(1-e^u) = 1$$

כי $\lim_{u\to-\infty} e^u = \lim_{u\to-\infty}\frac{1}{e^{-u}} = 0$ ללא קושי. כמו כן

$$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{u\to\infty}\left(-e^{-x}\right)|_0^u = -\lim_{u\to\infty}\left(e^{-x}\right)|_0^u$$
$$= -\lim_{u\to\infty}\left(e^{-u}-1\right) = 1$$

כלומר התשובה היא

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx = 1+1 = 2$$

עוד דוגמא:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{1+x^2}+\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}\\ &= \arctan x|_{-\infty}^{0}+\arctan x|_{0}^{\infty}\\ &= 0-\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{2}-0=\pi\end{aligned}$$

הנה גם דרך לנסות לחשב את π. בפועל אנחנו בדרך כלל פשוט נחשב

$$\arctan x|_{-\infty}^{\infty}$$

אם זו פונקציה רציפה ממילא הנקודה באמצע (שבחרנו להיות אפס) תתבטל, וכל עוד אנו לוקחים את הגבולות באופן בלתי תלוי בשני הצדדים, זה יהיה בסדר.

פרק 3

נוסחת טיילור

3.1 פולינומים

נניח שיש לנו פולינום

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \ldots + a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

אזי

$$\begin{aligned} p'(0) &= a_1 \\ p''(0) &= 2a_2 \\ p^{(3)}(0) &= 3 \cdot 2a_3 \\ p^{(k)}(0) &= k! a_k \end{aligned}$$

כלומר

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

כאשר $p^{(0)}(x) = p(x)$ וכאשר $0! = 1$. עכשיו ננסה משהו כזה עבור פונקציות שאינן פולינומים.

3.2 נוסחת טיילור

תהי $f(x)$ גזירה $n+1$ פעמים בסביבת הנקודה $x = a$, ותהי x נקודה בסביבה זו, אזי

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (n-a)^k + R_n$$

כאשר

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

כאשר ξ נקודה בין a לבין x.
כדי להוכיח זאת נסמן

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k$$

ונשים לב כי $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$. ונגדיר

$$M = \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^{n+1}}$$

ואת הפונקציה

$$\varphi(t) = f(t) - P(t) - M\,(t-a)^{n+1}$$

רואים מיד $\varphi(a) = 0$ כי $P(a) = f(a)$. כמו כן $\varphi(x) = 0$ מתוך ההגדרה של M. נשים לב ש-

$$\left\{\frac{d^k}{dt^k}\,(t-a)^{n+1}\right\}_{t=a} = 0$$

כל עוד $k < n+1$. לפיכך עבור $1 \le k \le n$

$$\varphi^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) - P^{(k)}(a) \equiv 0$$

עכשיו $\varphi(x) = \varphi(a) = 0$ לכן לפי משפט רול, יש נקודה ξ_1 שבה הנגזרת שלה $\varphi^{(1)}$ מתאפסת. אבל $\varphi^{(1)}$ מתאפסת גם ב-a, לכן שוב לפי משפט רול, יש נקודה ξ_2 שבה הנגזרת שלה, $\varphi^{(2)}(t)$ מתאפסת. הטיעון חוזר על עצמו עד שהגענו ל-$\varphi^{(n)}$, ואז שוב לפי משפט רול יש נקודה ξ שבה הנגזרת שלה $\varphi^{(n+1)}(t)$, מתאפסת. נגזרת זו היא (כי הרגנו את הפולינום $P(t)$)

$$\varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - M\,(n+1)!$$

כלומר יש ξ בין a ל-x כך ש

$$0 = f^{(n+1)}(\xi) - M\,(n+1)!$$
$$M = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

ולכן

$$\begin{aligned} f(x) &= P(x) + (x-a)^{n+1}\cdot M \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(x-a)^k + R_n \end{aligned}$$

מ.ש.ל.

נוסחא זו נקראת "פיתוח טיילור" של $f(x)$ סביב $x = a$. אם $a = 0$ זה גם נקרא "נוסחת מקלורין":

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n$$

3.3 דוגמאות של נוסחת טיילור וטורי טיילור

ננסה את הדוגמא $f(x) = e^x$ ונפתח סביב $x = 0$. הנגזרת היא תמיד e^x וערכה ב-$x = 0$ הוא 1, כלומר

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n$$

כאשר

$$R_n = \frac{e^\xi}{(n+1)!} x^{n+1}$$

יש טעם להעמיק בפיתוח אם עבור x נתון השארית R_n הולכת וקטנה כאשר אנו מוסיפים עוד ועוד איברים, כלומר אנו מתעניינים בגבול

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} R_n &= e^\xi \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= e^\xi \lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

נשים לב כי

$$\frac{x^n}{n!} = \frac{x}{n} \frac{x}{n-1} \frac{x}{n-2} \cdots \frac{x}{0!}$$

נניח לרגע $x > 0$, ויהי m מספר שלם עבורו $m > 2x$ אזי עבור $n > m$ אנו מקבלים

$$\frac{x}{n} < \frac{1}{2}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \frac{x^n}{n!} &= \frac{x^m}{m!} \frac{x^{m+1}}{m+1} \frac{x^{m+2}}{m+2} \\ &< \frac{x^m}{m!} \frac{1}{2^{n-m}} \\ &= \frac{(2x)^m}{m!} \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

כאשר n גדל ללא גבול, הביטוי הזה הולך לאפס כלומר

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

אם $x < 0$ כל ההגיון זהה עבור $|R_n|$ כלומר $\lim_{n\to\infty} |R_n| = 0$, וזה אומר בעצם ש-$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$ (מתכנס בהחלט לאפס משמעו מתכנס). לפיכך מצאנו

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

זה הטור של האקספוננט.

אנו יכולים באופן דומה לפתח טורים של פונקציות נוספות, למשל,

$$f(x) = \sin x$$

ננסה לפתח סביב 0: אנו מקבלים

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(0) &= \cos x|_0 = 1 \\
f^{(2)}(0) &= -\sin x|_0 = 0 \\
f^{(3)}(0) &= -\cos x|_0 = -1 \\
f^{(4)}(0) &= \sin x|_0 = 0 \\
f^{(5)}(0) &= 1
\end{aligned}$$

ומכאן זה חוזר על עצמו, כלומר

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}
\end{aligned}$$

באופן דומה

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k!)} x^{2k}
\end{aligned}$$

הטורים האלה מאפשרים לנו לחשב את הפונקציות האלמנטריות הטרנסנדנטיות.

פרק 4

ישומים של החדו"א

4.1 חקירת פונקציה

היום אנו יכולים לשרטט בעזרת מחשבים פונקציות רבות ולא צריכים לחשוב יותר מדי. אבל פעם היה צריך להפעיל קצת את השכל. בעזרת הכלי של הנגזרת אפשר להבין פחות או יותר את הצורה של גרף הפונקציה, האם היא עולה או יורדת, מהן נקודות הקיצון שלה ומהן נקודות הפיתול.

4.1.1 תחומי עלייה וירידה, מקסימה ומינימה

נתחיל עם תחומי עליה וירידה, כאן אנו נשתמש ברעיון של דיפרנציאל

$$dy = f'(x)dx$$

ברור לנו מכאן לחלוטין שאם $f'(x) > 0$ הפונקציה עולה, ואם ההיפך אז יורדת. אם יש נקודה x_0 שבה הנגזרת $f'(x)$ מחליפה סימן, כלומר היא היתה חיובית לפני x_0 והיא שלילית אחרי x_0 (או להיפך), אזי x_0 היא נקודת מקסימום (מינימום). אם הנגזרת שומרת על הסימן שלה, אז x_0 אינה נקודת קיצון כלל.

לפעמים רואים זאת ישר מהנגזרת, למשל

$$\begin{aligned} y &= x^{5/3} - 5x^{2/3} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{5}{3}x^{2/3} - \frac{10}{3}x^{-1/3} \\ &= \frac{5x-10}{3x^{1/3}} = 5\frac{x-2}{3x^{1/3}} \end{aligned}$$

הנגזרת באופן ברור מחליפה סימן ב-$x = 2$, לפני כן היא שלילית ואחרי חיובית ולכן $x = 2$ היא נקודת מינימום.

נקודה שבה $f'(x) = 0$ או שבה $f'(x)$ לא קיימת נקראת נקודה קריטית. נקודות קריטיות הן מועמדות להיות נקודות קיצון. אם קשה לשים לב מהנגזרת הראשונה מה קורה, אפשר להשתמש במבחן הנגזרת השנייה.

תהי x_0 נקודה קריטית של הפונקציה עם $f'(x_0) = 0$, ונניח שהפונקציה גזירה פעמיים בנקודה x_0 אזי

1. אם $f''(x_0) < 0$ הנקודה היא נקודת מינימום מקומית.
2. אם $f''(x_0) > 0$ הנקודה היא נקודת מקסימום מקומית.

אם $f''(x_0) = 0$ אז לא ניתן לדעת בעזרתה על אקסטרמה[1] בנקודה. הוכחה: הנחנו שהנגזרת השנייה קיימת, כלומר

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

מכיוון ש-$f'(x_0) = 0$. לפיכך לכל $\epsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שעבור $|x - x_0| < \delta$ מתקיים $\left|\frac{f'(x_0+\Delta x)}{\Delta x} - f''(x_0)\right| < \epsilon$. מכאן עבור ϵ קטן מספיק הוא עם אותו סימן של $f''(x_0)$, נניח לרגע ש-$f''(x_0) > 0$ וקיבלנו

$$\frac{f'\left(x_0 + \Delta x\right)}{\Delta x} = A > 0$$

עבור איזה A חיובי. זה מתקיים עבור Δx חיוביים ושליליים. נסמן $l = |\Delta x|$ ונקבל

$$\begin{aligned} f'(x_0 + l) &= A \cdot l > 0 \\ f'(x_0 - l) &= f''(x_0) \cdot (-l) < 0 \end{aligned}$$

כלומר $f'(x)$ מחליפה סימן משלילי לחיובי, ולפיכך x_0 היא נקודת מינימום. אם $f''(x_0) < 0$, אז באופן דומה מדובר בנקודת מקסימום.

נקודות מקסימום ומינימום יכולות להיות גם נקודות שבהן $f'(x) \neq 0$, למשל הפונקציה

$$f(x) = x^3, \qquad x \in [-1, 1]$$

מקבלת את ערכיה הקיצוניים ב-$x = \pm 1$, שתי נקודות שבהן הנגזרת אינה אפס.

משפט: אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a, b]$ יש ל-$f(x)$ לפחות נקודת מינימום מוחלט אחת ולפחות נקודת מקסימום מוחלט אחת בקטע, ונקודה זו היא נקודה קריטית של $f(x)$ או אחת מנקודות הקצה של הקטע. [ללא הוכחה כאן].

4.1.2 עקמומיות ונקודות פיתול

הפונקציה קמורה כלפי מעלה ("מחייכת"), כאשר גרף הפונקציה הוא מעל המשיק בסביבה של נקודה מסויימת. היא קמורה כלפי מטה ("בוכה") כאשר גרף הפונקציה מתחת למשיק בסביבה של הנקודה. לא נוכיח זאת עכשיו, אבל אם $f''(x_0) > 0$ בתחום (a, b) אזי הפונקציה קמורה כלפי מעלה בתחום, ואם $f''(x_0) < 0$ אזי היא קמורה כלפי מטה בתחום.

אם $f''(x_0)$ מחליפה סימן אזי x_0 היא נקודת פיתול, נקודה שבה הקמירות משתנה. דוגמא טובה היא

$$\begin{aligned} y &= x^3 - 75x \\ y' &= 3x^2 - 75 \\ y'' &= 6x \end{aligned}$$

[1] הרבים של אקסטרמום הוא אקסטרמה. זה אופייני למילים חסרות מין בלטינית (למשל מקסימום או מומנטום).

כלומר $x=\pm 5$ הן האקסטרמה (עולה-יורדת-עולה) ו-$x=0$ היא נקודת פיתול. דוגמא יפה אחרת:

$$
\begin{aligned}
y &= \sin x \\
y'' &= -\sin x
\end{aligned}
$$

כלומר הקמירות של הפונקציה היא בסימן הפוך לפונקציה עצמה, וקל לראות זאת מהגרף של הפונקציה.

4.1.3 אסימפטוטות

אסימפטוטות יש מכמה סוגים. יש לנו אסימפטוטה אנכית אם $\lim_{x\to a^+} f(x)$ או $\lim_{x\to a^-} f(x)$ שווה ל-∞ או $-\infty$. ראינו כבר את זה בעצם עבור הפונקציה

$$y = 1 + \frac{1}{x}$$

בנקודה $x \to 0^{\pm}$. באותה דוגמא ראינו גם אסימפוטוטות אופקיות.

אסימפטוטות מעט יותר מסובכות הן האסימפטוטות המשופעות. הישר $y = ax+b$ הוא אסימפטוטה משופעת אם

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

כדי למצוא בפועל את המקדמים של הישר, נשתמש בנוסחאות

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - ax]$$

ובאופן דומה עבור $x \to -\infty$. לדוגמא, הפונקציה

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}, |x| > 1$$

יש לה אסימפטוטות מאונכות ב-$x \to \pm 1$ ובשני המקרים שואפות לאינסוף. לגבי אסימפטוטה משופעת,

$$
\begin{aligned}
a &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x^{-2}}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1/2} \\
&= \lim_{u\to 0} (1-u)^{-1/2} = 1
\end{aligned}
$$

לגבי b:

$$\begin{aligned}b &= \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]_{a=1} = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right]\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2-x\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-x^2\left(x^2-1\right)}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}\left(x^2+x\sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2\sqrt{x^2-1}+x\left(x^2-1\right)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{x^{-1}\sqrt{x^2-1}+1-x^{-2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^{-1}}{\sqrt{1-x^{-2}}+1-x^{-2}}\\ &= \frac{\lim_{x\to\infty}x^{-1}}{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1-x^{-2}}+1-x^{-2}\right)} = \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

כלומר האסימפטוטה המשופעת היא $y = x$. ב-$x \to -\infty$. בצד השני לעומת זאת

$$\begin{aligned}a &= \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\\ &= \lim_{u\to\infty}\frac{-u}{\sqrt{u^2-1}} = -1\end{aligned}$$

ה-b יוצא אותו דבר. לכן $y = -x$ הוא אסימפטוטה משופעת מהצד השני. המקרה של אסימפטוטה אופקית הוא מקרה פרטי של המשופעת כאשר b קיים ואילו $a = 0$.

דוגמא נוספת

$$y = e^x \sin x$$

בצד החיובי ברור שהפונקציה לא מתכנסת לכלום, אבל בצד השלילי

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} e^x\sin x &= \lim_{u\to\infty} e^{-u}\sin(-u)\\ &= -\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x\end{aligned}$$

הפונקציה $\sin x$ חסרת גבול, אבל חסומה, כלומר לכל $\epsilon > 0$ אם נבחר

$$e^{-x} < \epsilon$$

נקבל

$$|e^{-x}\sin x| < \epsilon|\sin x| < \epsilon$$

כלומר

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x = 0$$

ולפיכך עבור $x \to -\infty$ הפונקציה שלנו $y = e^x \sin x$ שואפת לאפס, ז"א יש לנו אסימפטוטה אופקית.

4.1.4 חקירה מלאה של פונקציה

הפרוצדורה היא כזו

1. תחום הגדרה
2. נקודות חיתוך עם הצירים
3. תחומי עליה וירידה
4. נקודות קיצון
5. תחומי קמירות
6. נקודות פיתול
7. אסימפטוטות
8. שרטוט גרף

לצורך דוגמא ניקח את הפונקציה

$$y = 4\log^2 x - 4\log x - 3$$

1. תחום הגדרה: פשוט מאוד, $x > 0$. הלוגריתם לא מוגדר עבור מספר שלילי ומתבדר ב-$x = 0$.
2. נקודות חיתוך עם הצירים

$$\begin{aligned} 4\log^2 x - 4\log x - 3 = 0 \\ \log x &= \frac{4 \pm \sqrt{16+48}}{8} \\ &= \frac{4 \pm 8}{8} = \frac{1 \pm 2}{2} = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\} \\ x_1 &= e^{-1/2} \\ x_2 &= e^{3/2} \end{aligned}$$

אלה נקודות החיתוך עם ציר ה-x. את ציר ה-y הפונקציה לא חותכת כי תחום ההגדרה שלה לא כולל את $x = 0$.

3. תחומי עליה וירידה: נגזור

$$y' = \frac{8}{x}\log x - \frac{4}{x} = \frac{4}{x}(2\log x - 1)$$

ה-x תמיד חיובי לכן סימן הנגזרת נקבע על ידי

$$\begin{aligned} 2\log x - 1 > 0 \\ 2\log x > 1 \\ \log x > \frac{1}{2} \\ x > e^{1/2} = \sqrt{e} \end{aligned}$$

מאחר שה-$\log$ הוא פונקציה מונוטונית עולה ($\forall x: \frac{d}{dx}\log x = \frac{1}{x} > 0$) ברור כי עבור $x > e^{1/2}$ הפונקציה שלנו עולה ואילו עבור $x < e^{1/2}$ הפונקציה יורדת.

4. נקודות קיצון: מהדיון הקודם ברור ש-y' מחליפה סימן בנקודה $x = \sqrt{e}$, ולכן זו נקודת מינימום. אין עוד נקודות קיצון משום שאין קצוות לתחום ההגדרה של הפונקציה שהוא $(0, \infty)$. ערך הפונקציה במינימום שלה הוא

$$y_{\min} = y(\sqrt{e}) = 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$$

5. קמירות: נגזור שוב

$$\begin{aligned} y'' &= -\frac{4}{x^2}(2\log x - 1) + \frac{4}{x}\frac{2}{x} \\ &= \frac{4}{x^2}\{2 - (2\log x - 1)\} \\ &= \frac{4}{x^2}(3 - 2\log x) \end{aligned}$$

הסימן נקבע ע"י הגורם $3 - 2\log x$ כלומר

$$\begin{aligned} 3 - 2\log x &> 0 \\ \log x &< \frac{3}{2} \\ x &< e^{3/2} \end{aligned}$$

כלומר $y'' > 0$, כלומר קמירות כלפי מעלה, עבור $x < e^{3/2}$ ואילו $y'' < 0$, כלומר קמירות כלפי מטה, עבור $x > e^{3/2}$.

6. נקודות פיתול: ה-y'' מחליפה סימן בדיוק ב-$x = e^{3/2}$ - זו נקודת הפיתול היחידה.

7. אסימפטוטות: הלוגריתם עצמו מקיים $\lim_{x\to 0^+}\log x = -\infty$. ב-$x = 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(4\log^2 x - 4\log x - 3\right) = \lim_{u\to -\infty}\left(4u^2 - 4u - 3\right)$$

ובכן,

$$4u^2 - 4u - 3 > 0$$

עבור $u < -1/2$. מהידע שלנו על פרבולות אנו יודעים שכאשר $u \to -\infty$ הביטוי $4u^2 - 4u - 3$ גדל ללא גבול, כלומר

$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \infty$$

ויש לנו אסימפטוטה אנכית שם. מה קורה ב-$x \to \infty$?

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to\infty} \frac{4\log^2 x - 4\log x - 3}{x} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{y'(x)}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x}\left(2\log x - 1\right) \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{8}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{8}{x} = 0 \end{aligned}$$

אולי יש לנו אסימפטוטה אופקית? מסתבר שלא:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to\infty} y(x) \\ &= \lim_{x\to\infty} \left\{4\log^2 x - 4\log x - 3\right\} = \infty \end{aligned}$$

הגבול לא קיים.

8. שרטוט הגרף. הפונקציה מתחילה ב-$x=0$ באינסוף, ויורדת בצורה קמורה כלפי מעלה, חותכת את ציר ה-x ב-$x_1 = e^{-1/2}$ עד למינימום ב-$x = e^{1/2}$. משם היא עולה וחותחת שוב את ציר x ב-$x_2 = e^{3/2}$, שם היא גם משנה את הקמירות שלה. היא ממשיכה בקמירות כזו עד אינסוף, מתבדרת לאט (הלוגריתם מתבדר באינסוף, אבל לאט יותר מכל חזקה).

4.2 נפח גופי סיבוב

"גופי סיבוב" הם גופים שמתקבלים מגרף של פונקציה כאשר "מסובבים" אותו סביב ציר ה-x. אם למשל נסובב את

$$y = ax$$

בקטע $x \in [0,h]$ נקבל חרוט ישר שזווית הראש שלו $2\tan^{-1} a$ וגובהו h. מה יהיה נפח של חרוט כזה? כדי לחשב זאת, אנו משתמשים ברעיון של חלוקה למלבנים קטנים. כל מלבן שאורכו Δx_i ורוכבו $f(x_i)$ נותן לנו נפח

$$V_i = \pi f^2(x_i)\Delta x_i$$

הנפח הכולל הוא

$$\sum_i V_i = \pi \sum_i f^2(x_i)\Delta x_i$$

כאשר אנו לוקחים את הגבול של חלוקה לאינסוף קטעים, כך שהאורך של הקטע הארוך ביותר Δx_i הולך לאפס, אנו מקבלים

$$V = \pi \int_a^b dx\, f^2(x)$$

כאשר (a,b) הוא הקטע על ציר ה-x שמעניין אותנו.

עבור למשל החרוט:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h dx\ (ax)^2 \\ &= \pi a^2 \int_0^h dx\, x^2 \\ &= \pi \frac{a^2 h^3}{3} \end{aligned}$$

כדי לראות את הנוסחא המוכרת לנו נשים לב שרדיוס הבסיס של החרוט הוא $R = ah$ כלומר

$$V = \pi \frac{(ah)^2\, h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

שליש נפח של הגליל המתאים.

חישוב נפח של גופי סיבוב סביב ציר ה-y

נביט על פונקציה $f(x)$ בקטע $[a, b]$, ונניח שבקטע זה הפונקציה חיובית. אם נסובב את השטח מתחת לגרף שלה סביב ציר y נקבל גוף תלת-ממדי. אפשר לפרק את הקטע שוב למלבנים קטנים, כך שכל מלבן, כשהוא מסתובב סביב ציר y מתאר קליפה גלילית קטנה שנפ

$$\begin{aligned} \Delta V_i &= \pi \left(x_{i+1}^2 - x_i^2\right) \cdot f(\xi_i) \\ &= \pi \left(x_{i+1} - x_i\right)\left(x_{i+1} + x_i\right) f(\xi_i) \end{aligned}$$

כאשר $x_i < \xi_i < x_{i+1}$ אנו נרצה לקחת את האינטגרל בסוף, לפיכך התוצאה לא תהיה תלוייה בחלוקה ואנו יכולים לקחת חלוקה מסויימת שבה תמיד $\xi_i = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$ כלומר

$$\Delta V_i = \pi \Delta x_i \cdot 2\xi_i f(\xi_i)$$

כלומר

$$V = \lim_{n\to\infty} 2\pi \xi_i f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

לדוגמא, נחשב את הנפח של טורוס, שמרכזו בראשית, ושטח החתך שלו מגדיר את המעגל

$$(x - R)^2 + y^2 = r^2$$

כלומר

$$y = \sqrt{r^2 - (x - R)^2}$$

עכשיו

$$\int_{R-r}^{R+r} 2\pi x f(x) dx = 2\pi \int_{R-r}^{R+r} dx\, x \sqrt{r^2 - (x - R)^2}$$

נחליף משתנים $x-R=r\cos\theta$ כלומר

$$dx=-r\sin\theta d\theta$$

ונקבל

$$\begin{aligned}
-\int d\theta r\sin\theta\cdot(R+r\cos\theta)\sqrt{r^2-r^2\cos^2\theta} &= -\int d\theta r\sin\theta\,(R+r\cos\theta)\,r\sin\theta\\
&= -\int d\theta\sin^2\theta\left(r^2R+r^3\cos\theta\right)\\
&= -r^2R\int d\theta\sin^2\theta-r^3\int d\theta\sin^2\theta\cos\theta\\
&= -r^2R\frac{1}{2}\int(1-\cos 2\theta)\,d\theta-r^3\int d\,(\sin\theta)\sin^2\theta\\
&= -\frac{r^2R}{2}\left\{\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right\}-r^3\frac{\sin^3\theta}{2}
\end{aligned}$$

גבולות האינטגרציה הם $x=[R-r,R+r]$ כלומר $\theta=[\pi,0]$ וקיבלנו

$$-\int{}_{\pi}^{0}d\theta\cdots=-\frac{r^2R}{2}\{0-\pi\}=\frac{\pi r^2R}{2}$$

כלומר הנפח הוא 2π כפול זה כפול 2 (כי לקחנו רק את החצי $y>0$ של הטורוס)

$$2\pi Rr^2$$

פרק 5

משוואות דיפרנציאליות רגילות מסדר ראשון

משוואה דיפרנציאלית רגילה היא יצור מהצורה

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \Phi\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

למשל

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(1+x^2\right)y - \frac{d^2y}{dx^2} = e^{-x}$$

הנגזרת הגבוהה ביותר נקראת הסדר של המשוואה. כמו כן, אם הנגזרות או הפונקציה מופיעות בחזקות, החזקה הגבוהה ביותר נקראת המעלה או הדרגה של המשוואה. פתרון של המשוואה הוא פונקציה

$$y = \phi(x)$$

שגזירה n פעמים ומקיימת את המשוואה באיזה תחום.

דוגמא ראשונה

למשל

$$\frac{dy}{dx} - ay = b$$

$$\frac{dy}{dx} == a\left(y + \frac{b}{a}\right)$$

אפשר לעשות טריק כזה

$$\begin{aligned}\frac{dy/dx}{y+b/a}&=a\\ \frac{d}{dx}\left(\ln\left|y+\frac{b}{a}\right|\right)&=a\\ \ln\left|y+\frac{b}{a}\right|&=ax+c\\ \left|y+\frac{b}{a}\right|&=e^{ax+c}=e^{c}e^{ax}\\ y+\frac{b}{a}&=\pm e^{c}e^{ax}\\ y&=Ce^{ax}-\frac{b}{a}\end{aligned}$$

כאשר $C=\pm e^{c}$ מספר ממשי כלשהו. בדיקה:

$$\begin{aligned}y'&=aCe^{ax}\\ y'-ay&=aCe^{ax}-a\left(Ce^{ax}-\frac{b}{a}\right)\\ &=b\end{aligned}$$

5.1 משוואות מסדר ראשון וממעלה ראשונה

מהבדיקה שביצענו אפשר להגיע לרעיון של "גורם אינטגרציה". משוואה כזו היא מה-צורה

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=g(x)$$

גורם אינטגרציה הוא פונקציה $\mu(x)$ שאם נכפיל בה, המשוואה תהפוך לאינטגרבילית,

$$\mu\frac{dy}{dx}+p\mu y=\mu g(x)$$

נשים לב שאם $p(x)\mu(x)=\mu'(x)$ אזי

$$\begin{aligned}\mu y'+\mu' y&=\mu g(x)\\ \frac{d}{dx}\left(\mu y\right)&=\mu g(x)\\ \mu y&=\int\mu g dx+c\\ y&=\frac{\int\mu g dx+c}{\mu(x)}\end{aligned}$$

כדי שכל זה יעבוד אנו צריכים, כאמור

$$\frac{d\mu}{dx} = p(x)\mu(x)$$

כלומר

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu(x)}\frac{d\mu}{dx} &= p(x)\\ \frac{d}{dx}\ln|\mu| &= p(x)\end{aligned}$$

נניח לרגע $\mu > 0$ ונקבל

$$\begin{aligned}\ln\mu &= \int p(x)dx + c'\\ \mu &= \exp\int p(x)dx\end{aligned}$$

כאשר בחרנו את $c' = 0$. דוגמא

$$y' - \frac{1}{2}y = e^{-x}$$

אז

$$\mu = \exp\int\left(-\frac{1}{2}\right)dx = e^{-x/2}$$

כלומר

$$\begin{aligned}e^{-x/2}y' - \frac{1}{2}e^{-x/2}y &= e^{-3x/2}\\ \frac{d}{dx}\left(e^{-x/2}y\right) &= e^{-3x/2}\\ e^{-x/2}y &= \int e^{-3x/2}dx + c\\ &= -\frac{2}{3}e^{-3x/2} + c\\ y &= -\frac{2}{3}e^{-x} + ce^{x/2}\end{aligned}$$

האמת היא שזו משפחה של פתרונות. כדי להגדיר את הבעיה עד הסוף צריך לקבוע תנאי התחלה, למשל $y(0) = y_0$ ואז

$$y(0) = -\frac{2}{3} + c = 0 \Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

וקיבלנו

$$y = \frac{2}{3}\left(e^{x/2} - e^{-x}\right)$$

5.1.1 מקדמים לא רציפים

למשל

$$y' + 2y = g(x)$$
$$g(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$$

ותנאי ההתחלה הוא

$$y(0) = 0$$

במקרה כזה פותרים בנפרד כל תחום. גורם האינטגרציה הוא בשני המקרים

$$\mu = \exp \int 2dx = e^{2x}$$

כלומר

$$\frac{d}{dx}\left(e^{2x}y\right) = e^{2x}g(x)$$

בתחום $0 \le x \le 1$ יש לנו

$$\begin{aligned} e^{2x}y &= \int e^{2x}dx + c \\ &= \frac{1}{2}e^{2x} + c \\ y &= \frac{1}{2} + ce^{-2x} \end{aligned}$$

בתחום $x > 1$ יש לנו

$$\begin{aligned} e^{2x}y &= d \\ y &= de^{-2x} \end{aligned}$$

עכשיו כדי שהפתרון יהיה רציף אנו חייבים

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + ce^{-2} &= de^{-2} \\ d &= \frac{1}{2}e^{2} + c \end{aligned}$$

חוץ מזה התנאי הוא

$$y(0) = 0$$

כלומר

$$\frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)$$

ולכן

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2x}\right) & 0 \le x \le 1 \\ \frac{1}{2}\left(e^2 - 1\right)e^{-2x} & 1 < x \end{cases}$$

5.1.2 הפרדת משתנים

לעיתים יש לנו משהו מהצורה

$$M(x)+N(y)\frac{dy}{dx}=0$$

אפשר לרשום זאת כך

$$M(x)dx+N(y)dy=0$$

או

$$M(x)dx=-N(y)dy$$

כך שהמשתנים מופרדים על ידי הסמל =. נחזור לצורה המקורית לעת עתה - אם מצאנו $\mu(x),\eta(y)$ כך שמתקיים אזי

$$\frac{d\mu}{dx}+\frac{d\eta}{dy}\frac{dy}{dx}=0$$
$$\frac{d}{dx}(\mu+\eta)=0$$
$$\mu(x)+\eta(y)=c$$

דרך אחרת לחשוב על זה

$$N(y)dy=-M(x)dx$$
$$\int N(y)dy=-\int M(x)dx+c$$

אם יש לנו תנאי התחלה, אפשר לבחור את c כך שיקיים אותו

$$\mu(x_0)+\eta(y_0)=c$$

אם נציב את זה בפתרון שלנו נקבל

$$\mu(x)-\mu(x_0)+\eta(y)-\eta(y_0)=0$$

כלומר

$$\int_{x_0}^{x}M(s)ds+\int_{y_0}^{y}N(s)ds=0$$

המשוואה האחרונה היא פתרון (בצורה סתומה) של המשוואה הדיפרנציאלית כולל תנאי ההתחלה.

דוגמא

נפתור את

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)},y(0)=-1$$

נרשום זאת מחדש

$$(2y-2)\,dy = \left(3x^2+4x+2\right)dx$$

אינטגרציה לשני הצדדים

$$y^2-2y = x^3+2x^2+2x+c$$

כדי לקבל את c נציב את תנאי ההתחלה

$$3 = c$$

כלומר

$$y^2-2y = x^3+2x^2+2x+3$$

זה פתרון מרומז, כדי לקבל פתרון מפורש:

$$y^2-2y-\left(x^3+2x^2+2x+3\right) = 0$$

כלומר

$$\begin{aligned} y &= \frac{2\pm\sqrt{4+4\left(x^3+2x^2+2x+3\right)}}{2} \\ &= 1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+4} \end{aligned}$$

אם נציב את תנאי ההתחלה שוב

$$-1 = 1\pm\sqrt{4} = 1\pm 2$$

מסתבר שרק הפתרון עם סימן ה-$-$ הוא הנכון כלומר התשובה הסופית היא

$$y = 1-\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$$

הפתרון הזה כמובן תקף רק אם הביטוי שתחת השורש אי שלילי, כלומר $x > -2$ - הסיבה לאי השוויון היא שעבור $x = -2$ יוצא $y = 1$, ואז המשוואה המקורית לא מוגדרת יותר.

חשוב להבין שלא תמיד אפשרי לפתור צורה סתומה עבור y כפי שעשינו כאן. למשל

$$y^2+\ln|y| = \sin x + c$$

לא ניתנת לפתרון בקלות. במקרים כאלה עדיף להשאיר את הצורה המרומזת, והיא נחשבת ל"פתרון".

עוד דוגמא: תנאי ההתחלה הוא $y(0) = 0$ והמשוואה היא

$$\begin{aligned} y^2\sqrt{1-x^2}dy &= \arcsin x dx \\ y^2 dy &= \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx \end{aligned}$$

כלומר

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{3}y^3 &= \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x \\
u &= \arcsin x \\
\frac{1}{3}y^3 &= \int u du = \frac{1}{2}u^2 + c \\
&= \frac{1}{2} \arcsin^2 x + c
\end{aligned}
$$

מתנאי ההתחלה

$$c = 0$$

כלומר

$$y^3 = \frac{3}{2} \arcsin^2 x$$

מתי הפתרון תקף? ראשית צריך להגביל את x כדי ש-$\arcsin x$ תהיה פונקציה. הענף הראשי של $\arcsin$ מתאים כאן כלומר $|x| < 1$. כמו כן מתחייב מכאן ש-$y \geq 0$ כדי ש-$y^3 \geq 0$, כלומר

$$y = \left[\frac{3}{2} \arcsin^2 x\right]^{1/3}$$

הוא הפתרון המפורש שלנו.

5.1.3 משוואות הומוגניות

אם יש לנו משוואה מהצורה

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

כדאי להגדיר $v = \frac{y}{x}$ או $y = vx$ כלומר

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(vx) &= F(v) \\
v + x\frac{dv}{dx} &= F(v)
\end{aligned}
$$

זו משוואה שניתנת להפרדה

$$
\begin{aligned}
x\frac{dv}{dx} &= F(v) - v \\
\frac{dv}{F(v) - v} &= \frac{dx}{x}
\end{aligned}
$$

בתקווה, האינטגרל באגף שמאל יהיה מספיק פשוט לביצוע.

דוגמא

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{y^2+2xy}{x^2}\\ &= \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{y}{x}\right)\end{aligned}$$

מכאן

$$F(v) = v^2 + 2v$$

וקיבלנו

$$x\frac{dv}{dx} = v^2 + v$$

ומכאן

$$\begin{aligned}\frac{dv}{v^2+v} &= \frac{dx}{x}\\ \int \frac{dv}{v^2+v} &= \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c\\ \int \frac{dv}{v\,(v+1)} &= \int dv \frac{1+v-v}{v\,(v+1)}\\ &= \int dv \left[\frac{1}{v} - \frac{1}{v+1}\right]\\ &= \ln|v| - \ln|v+1|\end{aligned}$$

אנו רואים שיש בעיה כאשר $v=-1, v=0$. במקרים האלה נטפל אחר כך. בינתיים

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{v}{v+1}\right| &= \ln|x| + c\\ \ln\left|\frac{v}{x(v+1)}\right| &= c\\ \left|\frac{v}{x\,(v+1)}\right| &= e^c = C\\ \frac{v}{v+1} &= Bx\end{aligned}$$

כאשר $B = \pm C$ קבוע. מכאן

$$\begin{aligned}v &= \frac{Bx}{1-Bx}\\ y = vx &= \frac{Bx^2}{1-Bx}\end{aligned}$$

מה קורה בערכים $v=0,-1$? מסתבר שאלה פתרונות קבועים של המשוואה $x\frac{dv}{dx}=v^2+v$ כלומר

$$y=0, y=-x$$

הפתרון הראשון מכוסה על ידי $B=0$, ושני הוא הגבול $B\to\pm\infty$.

פרק 6

פונקציות מרובות משתנים

6.1 פונקציות מרובות משתנים ונגזרות חלקיות

כשיש לנו פונקציה של יותר ממשתנה אחד, למשל

$$f(x,y) = x^2 \sin y + e^y \cos x$$

יש לנו אפשרות לגזור את הפונקציה לפי כל אחד מהמשתנים,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$$

ובאופן דומה מגדירים את $\frac{\partial f}{\partial y}$ או f_y. באופן מעשי אנו גוזרים לפי אחד המשתנים ומתייחסים לשני כאל קבוע,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin y - e^y \sin x$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos y + e^y \cos x$$

נגזרות מסדר קבוע הן $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ ובאופן דומה עבור y, אבל גם:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

ולהיפך $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

פונקציה של משתנה אחד גזירה כאשר הנגזרת קיימת. עבור משתנים מרובים הפונקציה נחשבת גזירה אם יש לה נגזרות ראשונות רציפות. במקרה כזה (ללא הוכחה) אפשר לקרב את הפונקציה קירוב ליניארי בסביבה של נקודה

$$f(x+h, y+k) = f(x,y) + h\frac{\partial f}{\partial x} + k\frac{\partial f}{\partial y} + \epsilon_1 h + \epsilon_2 k$$

כאשר $\epsilon_1, \epsilon_2 \to 0$ הולכים לאפס כאשר $h, k \to 0$. אנו מגדירים באופן דומה את הדיפרנציאל השלם של הפונקציה

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

לדיפרנציאל השלם יש משמעות רק אם הפונקציה גזירה.
אם $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ קיימת ורציפה בתחום אזי

$$f_{xy} = f_{yx}$$

כלומר אין משמעות לסדר הגזירה. זה יהיה נכון ברוב המקרים שנתקלים בהם בפועל.

6.2 נגזרת כיוונית

הבה נביט על הדיפרנציאל בצורה קצת אחרת

$$df = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}}\right] \cdot [\hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy]$$

אנו יכולים להגדיר עכשיו את

$$d\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}dx + \hat{\mathbf{y}}dy$$
$$\boldsymbol{\nabla} f = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial f}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial f}{\partial y}$$

ואז

$$df = \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\mathbf{r}$$

נניח עכשיו ש-$d\mathbf{r} = ds\hat{\mathbf{n}}$ כאשר $\hat{\mathbf{n}}$ וקטור יחידה כלשהו

$$\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\alpha + \hat{\mathbf{y}}\sin\alpha$$

אזי

$$df = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \hat{\mathbf{n}}ds$$

אפשר להגדיר כך את

$$\frac{df}{ds} = \boldsymbol{\nabla} f \cdot \hat{\mathbf{n}}$$

זו הנגזרת הכיוונית של הפונקציה בכיוון $\hat{\mathbf{n}}$, או בזווית α, איך שרוצים להסתכל על זה. עכשיו ברור מדוע פונקציה $f(x,y)$ נחשבת גזירה רק כאשר f_x, f_y רציפות - רק אז הן נותנות את הנגזרת הכיוונית האמיתית בכל הזוויות. לדוגמא:

$$f = \sin\frac{x}{2}\cos y$$

נקבל

$$f_x = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\cos y, \qquad f_y = -\sin\frac{x}{2}\sin y$$

בנקודה $0,0$

$$f_x(0,0) = \frac{1}{2}, \quad f_y = 0$$

בכיוון x השינוי לפיכך

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{\hat{\mathbf{n}}=\hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{2}$$

בכיוון y

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{\hat{\mathbf{y}}} = 0$$

בכיוון $\alpha = \pi/4$ למשל

$$\left.\frac{df}{ds}\right|_{\hat{\mathbf{n}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

דוגמא אחרת: ניקח בכוונה פונקציה סימטרית

$$f(x,y) = e^{-\left(x^2+y^2\right)} = e^{-r^2}$$

ונחשב

$$f_x = -2xe^{-r^2}, \quad f_y = -2ye^{-r^2}$$

הנגזרת הכיוונית תהיה

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla} f\cdot\hat{\mathbf{n}} &= f_x\cos\alpha + f_y\sin\alpha \\ &= -2e^{-r^2}\left(x\cos\alpha + y\sin\alpha\right) \\ &= -2e^{-r^2}r\left(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right) \\ &= -2e^{-r^2}r\end{aligned}$$

כלומר הפונקציה משתנה באופן שווה בכל כיוון.

6.3 גבולות ורציפות

אנו נסמן

$$f(x,y,z) = f(\mathbf{r})$$

הגבול של פונקציה של כמה משתנים הוא

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = L$$

כלומר

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 : |\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| < \delta \to |f(\mathbf{r}) - L| < \epsilon$$

התנאי $|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0| < \delta$ הוא כמובן במובן של מרחק ווקטרי, אבל אם המשתנים שלנו אינם כולם מאותו סוג, אין בעיה להחליף את התנאי ב-[1]

$$\forall\epsilon > 0 \exists\delta_1,\delta_2 > 0 : |x-x_0| < \delta_1, |y-y_0| < \delta_2 \to |f(x,y) - L| < \epsilon$$

אלה תנאים שקולים. הפונקציה היא רציפה אם

$$\lim_{\mathbf{r}\to\mathbf{r}_0} f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}_0)$$

הגדרת הגבול מכילה בתוכה את הרעיון שלא חשוב באיזה אופן מתקרבים לנקודה, הגבול צריך להיות זהה. דוגמא לפונקציה שאין לה גבול היא למשל

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 > 0 \\ 0 & x=0, y=0 \end{cases}$$

הגבול של הפונקציה הזו לא קיים בראשית הצירים. קל לראות זאת על ידי חשיבה על הקווים $y = \pm x$, שבהם הפונקציה מקבלת את הערכים ± 1.

6.4 משוואות מדוייקות

אם יש לנו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון מהצורה

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

אפשר לרשום

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

הדבר הזה היה יכול להיות דיפרנציאל שלם אם

$$N = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad M = \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

ואז

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy = 0$$

[1] כמובן שעבור יותר משני משתנים יש להתאים את ההגדרה. הייתרון בהגדרה הוקטורית הוא הקלות של ההכללה ל-n ממדים

כלומר

$$d\psi = 0$$

או

$$\psi(x,y) = \text{const.}$$

איך נדע אם זה המצב? אם היה $\psi(x,y)$ שכזה, אזי

$$M_y = \psi_{xy} = \psi_{yx} = N_x$$

כלומר אנו יכולים לבדוק אם $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, ואם כן, מסתבר שקיים ψ כמו שאנו רוצים.

דוגמא

המשוואה שלנו היא

$$y\cos x + 2xe^y + \left(\sin x + x^2e^y - 1\right)\frac{dy}{dx} = 0$$

מכאן

$$\left(y\cos x + 2xe^y\right)dx + \left(\sin x + x^2e^y - 1\right)dy = 0$$

כלומר

$$\begin{aligned} M &= y\cos x + 2xe^y \\ N &= \sin x + x^2e^y - 1 \end{aligned}$$

הבדיקה שלנו מעלה

$$\begin{aligned} M_y &= \cos x + 2xe^y \\ N_x &= \cos x + 2xe^y \end{aligned}$$

התנאי מתקיים. לפיכך

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= M = y\cos x + 2xe^y \\ \psi &= y\sin x + x^2e^y + \phi(y) \end{aligned}$$

כאשר ϕ פונקציה של y בלבד. עכשיו

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = \sin x + x^2e^y + \frac{d\phi}{dy}$$

מצד שני $\frac{\partial\psi}{\partial y} = N$ כלומר

$$\frac{d\phi}{dy} = -1$$

כלומר $\phi = -y$ וקיבלנו

$$\psi = y \sin x + x^2 e^y - y$$

והפתרון שלנו הוא

$$y \sin x + x^2 e^y - y = c$$

כאשר c קבוע שרירותי שניתן לקבוע מתנאי התחלה. זה פתרון מרומז כמובן, משום שלא ניתן לחלץ את y.

6.4.1 גורמי אינטגרציה

לעיתים אפשר להפוך משוואה לא מדוייקת למשוואה מדוייקת על ידי מכפלה בגורם המתאים. אם

$$Mdx + Ndy = 0$$

איננה משוואה מדוייקת, אולי

$$\mu M dx + \mu N dy = 0$$

תהיה משוואה כזו. כדי שזה יתקיים אנו צריכים

$$(\mu M)_y = (\mu N)_x$$

כלומר

$$\mu_y M + \mu M_y = \mu_x N + \mu N_x$$
$$\mu_y M - \mu_x N = \mu \left(N_x - M_y\right)$$

אם נצליח לפתור את זה עבור μ, יהיה לנו גורם אינטגרציה. הבעיה היא שהמשוואה הזו היא לא פחות קשה מהמשוואה המקורית. אפשר לעשות אותה פשוטה יותר אם ננחש ש-μ תלוי רק ב-x למשל, ואז נקבל

$$\mu M_y = \frac{d\mu}{dx} N + \mu N_x$$
$$\frac{d\mu}{dx} = \mu \frac{M_y - N_x}{N}$$

כלומר אם $\frac{M_y - N_x}{N}$ הוא פונקציה של x בלבד, זה יצליח. באותה צורה אם $\frac{N_x - M_y}{M}$ תלוי ב-y בלבד יהיה לנו גורם $\mu(y)$. דוגמא:

$$\left(3xy + y^2\right) dx + \left(x^2 + xy\right) y' = 0$$
$$M = 3xy + y^2$$
$$N = x^2 + xy$$
$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(3x + 2y) - (2x + y)}{x^2 + xy}$$
$$= \frac{3x + 2y - 2x - y}{x\left(x + y\right)}$$
$$= \frac{x + y}{x\left(x + y\right)} = \frac{1}{x}$$

לפיכך

$$
\begin{aligned}
\frac{d\mu}{dx} &= \frac{\mu}{x} \\
\frac{d\mu}{\mu} &= \frac{dx}{x} \\
\ln|\mu| &= \ln|x| \\
\ln\left|\frac{\mu}{x}\right| &= 0 \\
\left|\frac{\mu}{x}\right| &= 1 \\
\mu &= \pm x
\end{aligned}
$$

ניקח את $\mu = x$ ונכפיל אותו במשוואה

$$\left(3x^2y + y^2x\right)dx + \left(x^3 + x^2y\right)dy = 0$$

עכשיו היא מדוייקת וניתנת לפיתרון בעזרת השיטה שכבר ראינו,

$$
\begin{aligned}
\psi &= \int \left(x^3 + x^2y\right)dy = x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 + \phi(x) \\
\psi_x &= 3x^2y + y^2x + \phi'(x) \equiv 3x^2y + y^2x \\
\phi'(x) &= 0 \\
\phi &= c
\end{aligned}
$$

כלומר הפתרון

$$x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = \mathrm{const.}$$

6.5 מישור משיק

ראשית נבין איך לתאר מישור בשלושה ממדים. ניתן לאפיין מישור על ידי הכיוון שהוא ניצב לו, שנסמן ב-$\hat{\mathbf{n}}$. עכשיו, יש אינסוף מישורים שניצבים ל-$\hat{\mathbf{n}}$, לכן צריך גם לציין נקודה אחת ששייכת למישור, למשל $\mathbf{r}_0$. עכשיו, כל נקודה $\mathbf{r}$ במישור מובטח שהוקטור שמחבר אותה ל-$\mathbf{r}_0$ ניצב לאותו $\hat{\mathbf{n}}$ ולכן

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$$

ברכיבים קרטזיים

$$(x - x_0)\,n_1 + (y - y_0)\,n_2 + (z - z_0)\,n_3 = 0$$

או

$$n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0 \equiv A$$

הכפלה בקבוע תתן לנו

$$ax + by + cz = B$$

ועוד אינסוף משוואות כאלה שלמעשה שייכות לאותו זוג $\hat{\mathbf{n}}, \mathbf{r}_0$.

עכשיו במקרה שלנו, אם ניקח נקודה x_0, y_0 ו-$z_0 = f(x_0, y_0)$, ונשתמש בקירוב הליניארי

$$\begin{aligned} z - z_0 &= df = f_x dx + f_y dy \\ &= (x - x_0) f_x + (y - y_0) f_y \end{aligned}$$

וקיבלנו

$$z - z_0 - (x - x_0) f_x - (y - y_0) f_y = 0$$

לפיכך זו משוואה שמתארת מישור שעובר בנקודה $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ וניצב לווקטור

$$(f_x, f_y, -1)$$

זה המישור מצד שני, דרך אחרת להביט על אותה משוואה היא

$$dz = \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\mathbf{r}$$

כלומר כל קו משיק למשטח הפונקציה שייך לאותו מישור - זה המישור המשיק. קל להכליל את הרעיון הזה ליותר ממדים

$$x_n - x_0 - \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_{i0}) \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_{0i}} = 0$$

6.6 כלל השרשרת

נניח שיש לנו פונקציה

$$f = f(\xi, \eta)$$

ואילו ξ, η הן עצמן פונקציות של x, y

$$\eta = \eta(x, y), \xi = \xi(x, y)$$

אפשר לברר את f_x, f_y בעזרת הדיפרנציאל

$$df = f_\xi d\xi + f_\eta d\eta$$

מצד שני

$$d\xi = \xi_x dx + \xi_y dy$$

ובאופן דומה עבור η. בצורה כזו מקבלים

$$\begin{aligned}df &= f_\xi \xi_x dx + f_\xi \xi_y dy\\ &+ f_\eta \eta_x dx + f_\eta \eta_y dy\\ &= \left(f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x\right) dx + \left(f_\xi \xi_y + f_\eta \eta_y\right) dy\end{aligned}$$

כלומר

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

כאן הנקודה גם להבדיל בין הפונקציה לבין הגודל שהיא מייצגת, זו הבדלה חשובה בפיזיקה. למשל

$$U = \frac{3}{2}NkT$$
$$U = \frac{3}{2}PV$$

אלה נוסחאות מתרמודינמיקה של גז אידאלי. באחת מהן יש לנו $U(P,V)$ ובשנייה $U(N,T)$, ואלה שתי פונקציות שונות אך שתיהן נותנות את אותו הגודל (האנרגיה) של הגז. פורמלית היינו צריכים לרשום

$$F(x,y) = f(\xi(x,y),\eta(x,y))$$

ואז

$$F_x = f_\xi \xi_x + f_\eta \eta_x$$

אבל, בפיזיקה הרבה פעמים $F(x,y)$ מסמנת את אותה כמות פיזיקלית שסימנה $f(\xi,\eta)$, לכן אנו מתרשלים בסימון ומשתמשים ב-f לשתי הפונקציות השונות.

דוגמא

נניח שיש לנו פונקציה $V(r,\varphi) = r^2 \sin\varphi$ אבל אנו רוצים דווקא לדעת כיצד היא משתנה בקואורדינטות קרטיות:

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$$

כלומר

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{y}{x}, \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

אזי

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial x} &= V_r r_x + V_\varphi \varphi_x \\
&= V_r \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} + V_\varphi \frac{1}{1+y^2/x^2} \cdot \frac{-y}{x^2} \\
&= V_r \cos\varphi - \frac{V_\varphi}{r} \sin\varphi \\
&= 2r \sin\varphi \cos\varphi - r\cos\varphi \sin\varphi \\
&= r\cos\varphi \sin\varphi \\
&= \frac{xy}{r} = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}
\end{aligned}$$

6.6.1 נגזרת שלמה בעזרת נגזרות חלקיות

בפיזיקה הרבה פעמים יש לנו פונקציה

$$F(x,y,z)$$

כאשר x,y,z הן קואורדינטות של חלקיק. דוגמא טובה היא האנרגיה הפוטנציאלית של החלקיק

$$V = V(x,y,z)$$

עכשיו, נניח שאנו מעוניינים בשינוי בזמן של הגודל הזה. יש לנו את המסלול של החלקיק $x(t), y(t), z(t)$ ואנו רוצים את $\frac{dV}{dt}$. במקרה כזה, אנו מיישמים את כלל השרשרת, אל שבמקום משתנים בלתי תלויים רבים, יש לנו משתנה בלתי תלוי אחד

$$\frac{dV}{dt} = V_x \frac{dx}{dt} + V_y \frac{dy}{dt} + V_z \frac{dz}{dt}$$

6.7 טור טיילור, דיפרנציאלים מסדר גבוה

הבה ניזכר בטור טיילור של פונקציה של משתנה אחד

$$f(x+dx) = f(x) + dx \cdot f'(x) + \frac{1}{2} dx^2 f''(x) + \ldots$$

אפשר ליישם את הנוסחא הזאת כדי להגיע לטור טיילור ב-n משתנים. אנו נדגים עבור שניים בלבד. נניח שאנו רוצים לפתח את הפונקציה שלנו $f(x,y)$ סביב נקודה $A = (x,y)$, ונסמן ב-$d\mathbf{r} = (dx,dy)$ את התזוזה מאותה נקודה. יהי ds האורך של אותה תזוזה

$$d\mathbf{r} = ds\hat{\mathbf{n}}$$

כל עוד אנו מביטים בכיוון מסויים $\hat{\mathbf{n}}$, הפונקציה שלנו $f(x,y)$ הופכת להיות פונקציה של s - הקואורדינטה לאורך ציר שמקביל ל-$\hat{\mathbf{n}}$. עבור פונקציה כזאת אפשר לרשום טור טיילור רגיל

$$f(x,y) = f(A) + ds \cdot f'(s) + \frac{1}{2} ds^2 f''(s) + \cdots$$

הנגזרת $f'(s)$ היא בעצם מה שקראנו נגזרת כיוונית

$$\begin{aligned} f'(s) &= \frac{d}{ds} f = \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} f \\ &= n_1 \frac{\partial f}{\partial x} + n_2 \frac{\partial f}{\partial y} \end{aligned}$$

מה תהיה הנגזרת השנייה לפיכך?

$$\begin{aligned} f''(s) &= \frac{d}{ds} f'(s) = n_1 \frac{\partial f'(s)}{\partial x} + n_2 \frac{\partial f'(s)}{\partial y} \\ \frac{\partial f'(s)}{\partial x} &= n_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + n_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f'(s)}{\partial y} &= n_1 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + n_2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{aligned}$$

כלומר

$$f''(s) = n_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 n_1 n_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + n_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

באופן פורמלי אפשר לרשום

$$\begin{aligned} f''(s) &= \left(n_1 \frac{\partial}{\partial x} + n_2 \frac{\partial}{dy} \right)^2 f \\ &= \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right)^2 f \end{aligned}$$

ההכללה היא

$$\begin{aligned} f^{(3)}(s) &= \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right)^3 f \\ &= n_1^3 f_{xxx} + 3 n_1^2 n_2 f_{xxy} + 3 n_1 n_2^2 f_{yyx} + n_2^3 f_{yyy} \end{aligned}$$

ובאופן כללי

$$\begin{aligned} f^{(n)}(s) &= \left(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\nabla} \right)^n f \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n_1^k n_2^{n-k} \frac{\partial^n f}{\left(\partial x\right)^k \left(\partial y\right)^{n-k}} \end{aligned}$$

נחזור לטור טיילור שלנו. עד סדר ראשון למשל:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(A) + ds f'(s) \\ &= f(A) + ds \left[n_1 f_x + n_2 f_y \right] \end{aligned}$$

נשים לב $ds \cdot n_1 = ds \cos\alpha = dx$ וגם $ds \cdot n_2 = dy$ כלומר

$$f(x,y) = f(A) + dx f_x + dy f_y$$

הבה נמשיך לאיבר השני

$$\frac{1}{2} ds^2 f''(s)$$

זה יוצא

$$\frac{1}{2} ds^2 \left[n_1^2 f_{xx} + 2n_1 n_2 f_{xy} + n_2^2 f_{yy}\right] = \frac{1}{2}\left[dx^2 f_{xx} + 2dxdy f_{xy} + dy^2 f_{yy}\right]$$

והשלישי באופן דומה

$$\frac{1}{3!} ds^3 f^{(3)}(s) = \frac{1}{3!}\left[dx^3 f_{xxx} + 3dx^2 dy f_{xxy} + 3dxdy^2 f_{xyy} + dy^3 f_{yyy}\right]$$

כך שאנו מקבלים עד סדר שלישי

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(A) + dx f_x + dy f_y + \frac{1}{2}\left[dx^2 f_{xx} + 2dxdy f_{xy} + dy^2 f_{yy}\right] \\ + \frac{1}{3!}\left[dx^3 f_{xxx} + 3dx^2 dy f_{xxy} + 3dxdy^2 f_{xyy} + dy^3 f_{yyy}\right] \end{aligned}$$

האיבר ה-n בטור טיילור קשור לגודל אחר שנקרא הדיפרניאל מסדר n. הדיפרנציאל הראשון הוא

$$df = f_x dx + f_y dy$$

הדיפרנציאל השני הוא הדיפרנציאל של הדיפרנציאל, כפונקציה של x, y כלומר

$$\begin{aligned} d^2 f &= \frac{\partial(df)}{\partial x} dx + \frac{\partial(df)}{\partial y} dy \\ &= \left(f_{xx} dx + f_{yx} dy\right) dx + \left(f_{xy} dx + f_{yy} dy\right) dy \\ &= f_{xx} dx^2 + 2f_{yx} dxdy + f_{yy} dy^2 \end{aligned}$$

וכן הלאה ושוב הנוסחא הכללית היא

$$\begin{aligned} d^n f &= \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} dx^n dy^{n-k} \frac{\partial^n f}{(\partial x)^n (\partial y)^{n-k}} \end{aligned}$$

ובמקרה של מספר שרירותי של ממדים

$$d^n f = (d\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\nabla})^n f$$

ניתן לפיכך לרשום את הנוסחא של טור טיילור, בעזרת הדיפרנציאלים

$$f(x,y)=f(A)+df+\frac{1}{2}d^2f+\frac{1}{3!}d^3f+\ldots+R_n$$

כאשר הנגזרות כולן נלקחות בנקודה A שסביבה פיתחנו. השארית נתונה על ידי

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(\xi,\eta)$$

כאשר $\xi\in(x,x+dx)\,,\eta\in(y,y+dy)$.

דוגמא

נפתח את $u=\sin x\sin y$ סביב הראשית עד סדר שני

$$\begin{aligned}u_x&=\cos x\sin y\\ u_y&=\sin x\cos y\\ u_{xy}&=\cos x\cos y=u_{yx}\\ u_{xx}&=-\sin x\sin y=u_{yy}\end{aligned}$$

היחיד שלא מתאפס בראשית הוא $u_{xy}(0,0)=1$ ולכן

$$u\simeq\frac{1}{2}\cdot 2u_{xy}(0,0)xy=xy$$

מה שיכולנו לנחש, $\sin x\simeq x,\sin y\simeq y$ בסמוך לראשית.

6.8 נקודות קיצון

אם יש לנו פונקציה של כמה משתנים, אנו יכולים לחפש נקודות סטציונריות על ידי חיפוש המקומות שעבורם

$$\frac{df}{ds}=\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}f=0$$

כלומר

$$\boldsymbol{\nabla}f=0$$

או

$$f_x=0,f_y=0$$

אלה המקומות שבהם אולי יש נקודות קיצון. כדי לברר את סוג נקודת הקיצון כדאי לרגע לחשוב על מה שנקרא "צורה ריבועית" בשני משתנים,

$$Q=A\sigma^2+2B\sigma\tau+C\tau^2$$

צורה כזאת נקראת definite אם לכל $\sigma,\tau\neq 0$ יש לה את אותו סימן. כדי לחקור זאת נבצע השלמה לריבוע

$$Q=A\left[\sigma^2+2B'\sigma\tau+C'\tau^2\right]$$

כאשר $B'=B/A, C'=C/A$. עכשיו

$$\begin{aligned}\sigma^2+2B'\sigma\tau+C'\tau^2&=\sigma^2+2\sigma B'\tau+B'^2\tau^2-B'^2\tau^2+C'\tau^2\\&=\left(\sigma+B'\tau\right)^2+\left(C'-B'^2\right)\tau^2\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}Q&=A\left[\left(\sigma+\frac{B}{A}\tau\right)^2+\left(\frac{C}{A}-\frac{B^2}{A^2}\right)\tau^2\right]\\&=A\left[\left(\sigma+\frac{B}{A}\tau\right)^2+\frac{CA-B^2}{A^2}\tau^2\right]\end{aligned}$$

יפה. עכשיו מה שבתוך המרובעיים, חיובי בוודאות עבור

$$CA-B^2>0$$

ולכן ל-Q יהיה הסימן של A אם תנאי זה מתקיים. אם $CA-B^2=0$ ה-Q יהיה עם סימן זהה עבור הרבה ערכים, אך חסר סימן (אפס) עבור

$$\sigma=-\frac{B}{A}\tau$$

עבור $CA-B^2<0$ יהיה ל-Q סימן משתנה (סימן הפוך ל-A אחד עבור $\sigma=-\frac{B}{A}\tau$ וסימן שווה ל-A עבור $\tau=0$). עכשיו במקרה של נקודה סטציונרית, נפתח בטור טיילור ונביט בדיפרנציאל השני

$$d^2f=f_{xx}dx^2+2f_{xy}dxdy+f_{yy}dy^2$$

לפיכך אם

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2>0$$

תהיה לנו נקודת קיצון, מינימים אם $f_{xx}>0$ ומקסימום אם $f_{xx}<0$. אם לעומת זאת

$$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2<0$$

זו תהיה נקודה שאינה מינימום ואינה מקסימום (אוכף). המקרה $f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2=0$ לא ניתן להכרעה על סמך נתונים אלה בלבד.

דוגמאות

1. הפונקציה $f = x^2 + xy + y^2 + ax + by$, נחפש נקודות סטציונריות

$$f_x = 2x + y + a$$
$$f_y = 2y + x + b$$

נחפש התאפסות בו-זמנית שלהן

$$2x + y + a = 0$$
$$2y + x + b = 0$$
$$x = \frac{b-2a}{3}$$
$$y = \frac{a-2b}{3}$$

הנגזרות השניות

$$f_{xx} = 2, f_{yy} = 2, f_{xy} = 1$$

כלומר

$$f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 4 - 1 = 3$$

וגם $f_{xx} > 0$ כלומר זו נקודת מינימום.

2. הפונקציה $f(x,y) = \left(y - x^2\right)^2 + x^5$. שוב,

$$f_x = 2\left(y - x^2\right)2x + 5x^4$$
$$f_y = 2\left(y - x^2\right)$$

רואים שעבור $x = y = 0$ שתי הנגזרות מתאפסות. נגזרות שניות:

$$\begin{aligned} f_{xx} &= 2\left[-2x\right]2x + 2\left(y - x^2\right)2 + 20x^3 \\ &= -8x^2 + 4y - 4x^2 + 20x^3 \\ &= -12x^2 + 20x^3 + 4y \\ f_{yy} &= 2 \\ f_{yx} &= -4x \end{aligned}$$

בראשית $f_{xx} = 0, f_{yy} = 2, f_{yx} = 0$ כלומר $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 = 0$ ולא ניתן לדעת מהקריטריון הזה. לאחר מחשבה נוספת מתברר שלפונקציה כאן אין אקסטרמום, משום שערכה הוא אפס, אבל ניתן להפיק ערכים חיוביים ושליליים בקרבת הראשית. למשל עבור $x = 0$

$$f = y^2$$

וזה חיובי לכל y. לעומת זאת עבור $y = x^2$ מקבלים $f = x^5$ וזה שלישי עבור x שליליים.

6.9 נקודות קיצון תחת אילוצים

המשוואה

$$\phi(x,y,z)=0$$

מתארת פונקציה $z=f(x,y)$ כלומר היא מתארת משטח כלשהו במרחב תלת ממדי. נניח שאנו שואלים מה הנקודה על המשטח שהכי קרובה לראשית, כלומר שהפונקציה

$$D(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

מינימלית. בלי האילוץ $\phi(x,y,z)=0$ התשובה היתה שהמינימום של D הוא ב-$(0,0,0)$. האילוץ משנה את הבעיה והופך אותה למעניינת יותר. דרך אחת להתמודד עם הבעיה היא להביע את $\phi(x,y,z)=0$ בצורה

$$z=f(x,y)$$

ואז אנו מקבלים

$$D(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+f^2(x,y)}$$

ועכשיו אנו יכולים לחפש את המינימום. זה טוב, אבל יש גם דרך אחרת.

נגביל את עצמנו לשני משתנים כרגע, ונניח שאנו מחפשים את הנקודות הסטציונריות של $f(x,y)$, אבל x,y אינם בלתי תלויים, אלא קשורים על ידי האילוץ

$$\phi(x,y)=0$$

אפשר לחשוב על $\phi(x,y)=0$ כעל עקום, שחותך את העקומים $f(x,y)=c$ באינסוף נקודות. כאשר אנו מטיילים על ϕ, אם בשלב מסויים השינוי ב-c מחליף סימן, אז זו נקודת קיצון. מתי זה יקרה, בהנחה ש-$f(x,y)$ גזירה וגם ϕ עקום גזיר? רק כאשר העקום ϕ משיק לאחד מ"קווי הגובה" של $f(x,y)$. בנקודה זו העקומים $f(x,y)=c$ ו-$\phi(x,y)=0$ משיקים זה לזה, כלומר יש להם את אותו ישר משיק, דהיינו, אם נגזור את $\phi(x,y)=0$ ו-$f(x,y)=c$

$$\begin{aligned}\phi_x+\phi_y y'&=0\\ f_x+f_y y'&=0\\ \frac{\phi_x}{\phi_y}&=\frac{f_x}{f_y}\end{aligned}$$

או

$$\frac{\phi_x}{f_x}=\frac{\phi_y}{f_y}$$

אם נמצא נקודה שמקיימת זאת, ביחד עם $\phi(x,y)=0$ - זה יהיה הפתרון.

מה יקרה אם לעומת זאת, נביט ב-

$$F(x,y)=f(x,y)+\lambda\phi(x,y)$$

ונחפש את הנקודות הסטציונריות שלה:

$$F_x = f_x + \lambda\phi_x = 0$$
$$F_y = f_y + \lambda\phi_y = 0$$

כלומר

$$\frac{\phi_x}{f_x} = \frac{\phi_y}{f_y}$$

בדיוק התנאי שרצינו.

$$f_x + \lambda\phi_y = 0$$
$$f_y + \lambda\phi_y = 0$$
$$\phi(x,y) = 0$$

ביחד יקבעו את x, y, λ ויהוו פתרון לבעיה המקורית. השיטה הזו נקראת שיטת כופלי לגראנז'. זה יעבוד כל עוד ϕ_x, ϕ_y לא מתאפסים שניהם בנקודה (אם שניהם מתאפסים העקום $\phi(x,y) = 0$ לא גזיר).

דוגמא: נביט ב-$f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$ והאילוץ $y = x+1$. הדרך הראשונה לפתור את הבעיה היא להציב את האילוץ ולקבל

$$g(x) = f(x, x+1) = e^{-x^2-(x+1)^2}$$

ועכשיו לחפש את המקסימום של $g(x)$, שברור שהוא המינימום של

$$u(x) = x^2 + (x+1)^2$$
$$= 2x^2 + 2x + 1$$

נקודת המינימום של $u(x)$ היא

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

ה-y המתאים הוא

$$y = x + 1 = \frac{1}{2}$$

וזו נקודת המקסימום של $f(x,y)$ תחת האילוץ $y = x+1$.

עכשיו נפתור זאת עם כופלי לגראנז', תהי

$$F = e^{-x^2+y^2} + \lambda\left(y - x - 1\right)$$

ונחפש את האקסטרמה שלו

$$F_x = -2xe^{-x^2-y^2} - \lambda = 0$$
$$F_y = -2ye^{-x^2-y^2} + \lambda = 0$$

מכאן על ידי חיבור המשוואות

$$e^{-x^2-y^2}\left(x+y\right)=0$$

כלומר $x=-y$. בנוסף יש את האילוץ $y=x+1$ ומכאן

$$\begin{aligned} y &= x+1=-y+1 \\ 2y &= 1 \\ y &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ואז

$$x=-\frac{1}{2}$$

ה-$\phi_x=-\phi_y=-1$ במקרה הזה ולכן אין חשש ששניהם מתאפסים. בדיוק כמו קודם. עכשיו, אם יש ל- F מינימום או מקסימום שם, אז גם ל-f: כי על העקום $\phi=0$ יוצא $F=f$. אחרת אפשר לנסות לברר לגבי f בצורה אחרת. זו תיאוריה שניתן לפתח, אבל היא יחסית מסובכת ולכן נעצור כאן. לפיכך עדיף לנו ליישם את הטכניקה הזו כאשר אנו יודעים מראש שיש אקסטרמום, או כאשר אנו יכולים לברר את טבעו על ידי מחשבה נוספת.

6.9.1 הוכחה עבור שני משתנים

על מנת שיהיה ל-$f(x,y)$ אקסטרמום בנקודה (ξ,η) תחת האילוץ $\phi(x,y)=0$, הכרחי שהדיפרנציאל df יתאפס באותה נקודה, כאשר dx,dy אינם בלתי תלויים אלא נבחרים על ידי

$$d\phi=\phi_x dx+\phi_y dy=0$$

כלומר הכרחי כי

$$f_x\left(\xi,\eta\right)dx+f_y(\xi,\eta)dy=0$$

כאשר $d\phi=0$ מתקיים. אם נכפיל את המשוואה הראשונה באיזה מספר λ ונחבר לשנייה נקבל

$$\left(f_x+\lambda\phi_x\right)dx+\left(f_y+\lambda\phi_y\right)dy=0$$

עכשיו נבחר $\lambda=-f_y/\phi_y$, כלומר $f_y+\lambda\phi_y=0$ (זה אפשרי אם $\phi_y\neq 0$) ונקבל

$$\left(f_x+\lambda\phi_x\right)dx=0$$

אבל dx שרירותי ולכן

$$f_x+\lambda\phi_x=0$$

בה"ה אם ϕ_y מתאפס אבל ϕ_x לא, נוכל לבצע את הטיעון הפוך, כלומר הטיעון תקף כל עוד אחד מה-ϕ_x,ϕ_y אינו אפס. הראינו שאם f סטציונרית בנקודה לאורך העקום $\phi=0$ (הגזיר) מתחייב שיש λ כך ש-

$$\begin{aligned} f_x+\lambda\phi_x &= 0 \\ f_y+\lambda\phi_y &= 0 \end{aligned}$$

6.9.2 הכללה של שיטת כופלי לגרנז' ליותר משני משתנים

במקרה של יותר משני משתנים, נניח שיש לנו פונקציה $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ו-m אילוצים

$$\phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, i = 1, 2, \ldots, m$$

אזי תנאי הכרחי לאקסטרמום של u תחת האילוצים הוא השוואה לאפס של הנגזרות של

$$F = f + \lambda_1\phi_1 + \lambda_2\phi_2 + \ldots + \lambda_m\phi_m$$

המשוואות

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0, i = 1, 2, 3, \ldots, n$$
$$\phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, i = 1, 2, 3, \ldots, m$$

מבררות את λ_i ואת ה-x_i.[2]

דוגמא

אנו רוצים למצוא את המינימום של $f = x^2y^2z^2$ תחת האילוץ $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, כלומר על פני כדור ברדיוס R. נבדוק אם כך את

$$F = x^2y^2z^2 + \lambda\left(x^2 + y^2 + z^2 - R^2\right)$$

נגזרות

$$F_x = 2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0$$
$$F_y = 2x^2yz^2 + 2\lambda y = 0$$
$$F_z = 2x^2y^2z + 2\lambda z = 0$$

הפתרון $x = y = z = 0$ נפסל על ידי האילוץ. בגלל הסימטריה כל לראות שהפתרון צריך לקיים $x^2 = y^2 = z^2$ כלומר

$$x^2 = \frac{R^2}{3}$$
$$x = \pm\frac{R}{\sqrt{3}}$$

וכנ"ל ל-y, z כלומר יש לנו $2^3 = 8$ פתרונות

$$x = \pm\frac{R}{\sqrt{3}}, y = \pm\frac{R}{\sqrt{3}}, z = \pm\frac{R}{\sqrt{3}}$$

הערך של הפונקציה הוא

$$u = \frac{R^2}{27}$$

[2] התנאי על אי התאפסות הנגזרות של האילוצים מוחלף בתנאי על יעקוביאנים - אבל בשלב זה עוד לא נחשפנו ליעקוביאנים ולכן דילגתי עליו כאן.

אגב, מכאן קיבלנו שתמיד

$$x^2y^2z^2 \leq \frac{R^6}{27}$$

או

$$\left(x^2y^2z^2\right)^{1/3} \leq \frac{R^2}{3} = \frac{x^2+y^2+z^2}{3}$$

זה מקרה פרטי של

$$\left(\prod_{i=1}^{n} u_i\right)^{1/n} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} u_i}{n}, \qquad u_i > 0$$

6.10 משוואות דיפרנציאליות חלקיות

ראינו כבר דוגמא כאשר פתרנו משוואה דיפרנציאלית מדוייקת ובדרך היינו ראינו את

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = M(x,y)$$

באופן כללי, משוואה דיפרנציאלית חלקית היא משוואה דיפרנציאלית עם נגזרות חלקיות. המושגים של סדר ודרגה (מעלה) למעשה זהים למקרה של משוואה דיפרנציאלית רגילה. למשל

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t}$$

או

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = e^{-\frac{x-vt}{\alpha}}$$

אנו לא ניכנס בקורס הזה לפתרונות של מד"ח - רק לשם השלמות עצרנו לרגע להזכיר אותן.

פרק 7

אינטגרלים מרובים

7.1 החלפת קואורדינטות ויעקוביאנים

אנו נפתח כאן קשר אנלוגי ל-

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx}$$

עבור פונקציות מרובות משתנים.

לעיתים אנו רוצים להחליף את x, y בקואורדינטות אחרות,

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y)$$

נניח שאנו מכירים את הנוסחא הזו ויודעים לפיכך את

$$\xi_x, \xi_y, \eta_x, \eta_y$$

אנו נניח שהקשר הזה הפיך, לפחות בתחום מסויים, כלומר גם

$$x = x\left(\xi, \eta\right), \qquad y = y\left(\xi, \eta\right)$$

מהן הנגזרות ההפוכות, כלומר מהן $x_\xi, x_\eta, y_\xi, y_\eta$? לפיכך אפשר לעשות מין טריק כזה

$$\begin{aligned} \xi &= \xi\left(x\left(\xi,\eta\right), y\left(\xi,\eta\right)\right) \\ \eta &= \eta\left(x\left(\xi,\eta\right), y\left(\xi,\eta\right)\right) \end{aligned}$$

לקבל משוואות שמתקיימות זהותית. כל אחת ממשוואות אלה אפשר לגזור ולקבל זהויות אחרות, למשל

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} &= 1 = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} &= 0 = \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \xi} &= 0 = \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \eta}{\partial \eta} &= 1 = \frac{\partial \eta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned}$$

אנו יכוליפ לפתור את המשוואות הללו עבור הנעלמים שלנו, למשל, בכתיב מקוצר

$$\begin{aligned}\xi_x x_\xi + \xi_y y_\xi &= 1\\ \eta_x x_\xi + \eta_y y_\xi &= 0\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}\xi_x x_\xi - \xi_y \frac{\eta_x}{\eta_y} x_\xi &= 1\\ x_\xi \left(\xi_x - \xi_y \frac{\eta_x}{\eta_y}\right) &= 1\\ x_\xi \frac{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}{\eta_y} &= 1\\ x_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} &= \frac{\eta_y}{\xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x}\end{aligned}$$

הגודל במכנה חשוב, וקוראים לו היעקוביאן של ξ, η ביחס ל-x, y ומסמנים אותו

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$$

אנו נסמן אותו פשוט ב-D. לאחר שפותרים את כל המשוואות מקבלים

$$x_\xi = \frac{\eta_y}{D},\ x_\eta = -\frac{\xi_y}{D},\ y_\xi = -\frac{\eta_x}{D},\ y_\eta = \frac{\xi_x}{D}$$

דוגמא: קואורדינטות פולריות:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \operatorname{tg}^{-1} \frac{y}{x}$$

מה הנגזרת x_r למשל?

$$\begin{aligned}D = \frac{\partial(r, \theta)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ \theta_x & \theta_y \end{vmatrix} = r_x \theta_y - r_y \theta_x\\ &= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{1}{x} - \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{-y}{x^2}\\ &= \frac{1}{r\left(1 + \tan^2 \theta\right)} + \frac{y^2}{r} \frac{1}{x^2 + y^2}\\ &= \frac{\cos^2 \theta}{r} + \frac{\sin^2 \theta}{r} = \frac{1}{r}\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}x_r = \frac{\theta_y}{D} &= r\theta_y = r \frac{1}{1 + (y/x)^2} \frac{1}{x}\\ &= r \frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{x}{r} = \cos \theta\end{aligned}$$

וכן הלאה שאר הנגזרות:

$$x_r = \frac{x}{r},\ x_\theta = -y,\ y_r = \frac{y}{r},\ y_\theta = x$$

היעקוביאן נותן לנו את הקשר בין הנגזרות, לבין הנגזרות של הפונקציות ההפוכות.
תכונה מעניינת של היעקוביאן אינה אלא זו:

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)} &= x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi \\ &= \frac{\eta_y}{D}\frac{\xi_x}{D} - \frac{\xi_y}{D}\frac{\eta_x}{D} \\ &= \frac{\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x}{D^2} = \frac{1}{D} \\ &= \left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^{-1}\end{aligned}$$

כלומר היעקוביאן של הטרנספורמציה ההפוכה הוא ההופכי של היעקוביאן.

7.2 כלל השרשרת עבור יעקוביאנים

נניח שעברנו מ-x,y ל-ξ,η ואז מ-ξ,η ל-u,v

$$\begin{aligned}u &= u(\xi,\eta) = u(\xi(x,y),\eta(x,y)) \\ v &= v(\xi,\eta) = v(\xi(x,y),\eta(x,y))\end{aligned}$$

מה יהיה $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$?

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = u_x v_y - u_y v_x$$

אפשר להציב עם כלל השרשרת, ואפשר לנסות לנחש. כדי לנחש ניקח מקרה קל במיוחד

$$\begin{aligned}\xi &= ax \\ \eta &= by\end{aligned}$$

וכמו כן

$$u = A\xi, v = B\eta$$

כלומר

$$u = Aax, v = Bby$$

ואז מקבלים

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \xi_x\eta_y = ab$$
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)} = AB$$
$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = AaBb$$

כלומר

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(u,v)}{\partial(\xi,\eta)}\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$$

זה כלל השרשרת של היעקוביאנים, ומסתבר שאם היינו עושים את האלגברה של

$$u_xv_y - u_yv_x = (u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x)(v_\xi\xi_y + v_\eta\eta_y) - (u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y)(v_\xi\xi_x - v_\eta\eta_x)$$

היינו מקבלים את אותו הדבר. אנו יכולים גם להבין מהטרנספורמציות הפשוטות שעשינו, שיש איזה קשר בין היעקוביאן לשינוי סקאלה (מתיחה של הצירים). למעשה התוצאה הקודמת היא מקרה פרטי של התוצאה הזו, כאשר מציבים $u = x, v = y$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} \equiv 1 = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\xi,\eta)}\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}$$

7.3 טרנספורמציה פרימיטיבית

טרנספורמציה פרימיטיבית היא משהו מעין זה

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = y$$

היעקוביאן שלה הוא

$$\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \xi_x\eta_y - 0 = \xi_x$$

נניח שבאיזה תחום $x \in (x_1, x_2)$ ה-0 $\xi_x >$. ננסה להבין את המעבר ממישור xy למישור $\xi\eta$. למשל הקו $x = x_0, y = t$ הופך ל-

$$\xi = \xi(x_0, t), \eta = t$$

כלומר עקום שבו כל נקודה עוברת לנקודה עם אותו y, אבל x אחר. העקום עובר ב-$(\xi(x_0,0), 0)$. מה לגבי הקו $x = t, y = y_0$? הוא עובר ל-

$$\xi = \xi(t, y_0), \quad \eta = y_0$$

כלומר קו אופקי בגובה y_0. אנו רואים שהאיזור המלבני

$$x \in [x_0, x_1], y \in [y_0, y_1]$$

מתעוות לאיזור עם שני קווים אופקיים $\eta = y_0, \eta = y_1$ ושני עקומים שתוחמים אותו $(\xi(x_0, t), t), (\xi(x_1, t), t)$.

ההנחה $\xi_x > 0$ עזרה לנו לראות שעבור $x_1 > x_2$ מתקיים גם $\xi(x_1, y_0) > \xi(x_2, y_0)$.

אנו יכולים להשלים את התמונה על ידי טרנפורמציה פרימיטיבית נוספת:

$$u = \xi, v = v(\xi, \eta)$$

הפעם התמונה ממישור $\xi\eta$ למישור uv היא שקווים אנכיים עוברים לקווים אנכיים ואילו קווים מהצורה $\xi = t, \eta = \eta_0$ עוברים לעקומים

$$u = t, v = v\,(t, \eta_0)$$

כלומר לעקומים. אם נניח $v_\eta > 0$ נקבל שוב מונוטוניות, כלומר $\eta_0 < \eta_1 \to v(t, \eta_0) < v(t, \eta_1)$. אם נביט עכשיו על הטרנספורמציה המורכבת

$$u = u(x, y), v = v\,(x, y)$$

כעל הרכבה של

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y), \quad \eta = y \\ u &= \xi, \qquad\quad , v = v(\xi, \eta) \end{aligned}$$

בצורה כזו

$$\frac{\partial\,(\xi, \eta)}{\partial\,(x, y)} = \xi_x, \quad \frac{\partial\,(u, v)}{\partial\,(\xi, \eta)} = v_\eta$$

כלומר

$$\frac{\partial\,(u, v)}{\partial\,(x, y)} = v_\eta \xi_x$$

אנו רואים שמלבן במישור xy מתעוות למין פסאודו מלבן במישור uv. מסתבר שהמובן של כיוון הסיבוב נשמר אם הסימן של היעקוביאן הוא חיובי, ומתהפך אם הוא שלילי.

לא נוכיח זאת, אבל כל טרנספורמציה הפיכה ניתן לפרק בסביבה של נקודה לשתי טרנספורמציות פרימיטיביות (לא בהכרח מהצורה הזו, יש עוד צורה שלא ניכנס אליה כרגע).

כדי שהמיפוי יהיה הפיך, ברור מההרכבה שעשינו שההנחה של מונוטוניות כלשהי היא הכרחית, ולכן בקצרה נסכם ונאמר, שהטרנספורמציה של קואורדינטות בסביבה של נקודה הפיכה אם ורק אם היעקוביאן בנקודה לא מתאפס.

7.4 גזירה תחת סימן האינטגרל

תהי $f(x,y)$ מוגדרת באיזה תחום במישור, ונביט בה עבור ערך נתון של x. במקרה כזה ניתן לאסכם אותה לפי y וליצור את

$$\int_a^b dy\, f(x,y)$$

הדבר הזה תלוי ב-x, כלומר הוא פונקציה של x. למשל

$$\int_0^1 \frac{xdy}{\sqrt{1-x^2y^2}} = \arcsin x$$

כפי שמסתבר מיד מתוך ההצבה $u=xy$. עכשיו, אם

$$F(x) = \int_a^b dy\, f(x,y)$$

ו-$f(x,y)$ רציפה בתחום שבו מדובר, אזי

$$\begin{aligned} |F(x+h)-F(x)| &= \left|\int_a^b dy\,[f(x+h,y)-f(x,y)]\right| \\ &\leq \int_a^b dy\,|f(x+h,y)-f(x,y)| \end{aligned}$$

עכשיו יהי $\epsilon>0$ אזי עבור h קטן מספיק, $|f(x+h,y)-f(x,y)|<\frac{\epsilon}{b-a}$ כלומר

$$|F(x+h)-F(x)| \leq \int_a^b dy \frac{\epsilon}{b-a} = \epsilon$$

ומכאן ש-$F(x)$ רציפה. יתרה מזאת ממשפט ערך הביניים

$$f(x+h,y)-f(x,y) = hf_x\left(\xi,y\right)$$

כלומר

$$\begin{aligned} F\left(x+h\right)-F(x) &= h\int_a^b dyf_x\left(x+\theta h,y\right), \qquad 0<\theta<1 \\ \frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \int_a^b dy\, f_x\left(x+\theta h,y\right) \\ F'(x) &= \int_a^b dy\, f_x\left(x,y\right) \end{aligned}$$

כלומר

$$\frac{dF}{dx} = \int_a^b dy\, \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$$

ההכללה של זה, שלא נוכיח היא

$$\begin{aligned}F &= \int_{u(x)}^{v(x)} dy\, f(x,y)\\ \frac{dF}{dx} &= \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - u'(x)f(x,u(x)) + v'(x)f(x,v(x))\end{aligned}$$

7.5 אינטגרל כפול

בהנתן פונקציה של $f(x,y)$ שמוגדרת באיזה איזור במישור xy שנסמן ב-R, אפשר להגדיר אינטגרל כפול בצורה הבאה: נחלק את התחום לתתי-תחומים כך שהשטח של תת-התחום ה-i הוא ΔS_i, אז אפשר ליצור את הסכום

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i$$

כאשר $(x_i,y_i)\in R_i$ נקודה כלשהיא בתוך התחום הקטן R_i. את הגבול של הדבר הזה נסמן כאינטגרל כפול

$$\iint dxdy\, f(x,y) \equiv \iint f(x,y)dS = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta S_i$$

אם אנו בתחום מלבני $x\in(a,b)\,,y\in(\alpha,\beta)$, אז עבור חלוקה מלבנית

$$\iint dSf(x,y) = \lim_{m,n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m} f(a+\mu\Delta x,\alpha+\nu\Delta y)\Delta x\Delta y$$

נגדיר

$$\Phi_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} f(a+\mu\Delta x,\alpha+\nu\Delta y)\Delta x$$

$$\iint dSf(x,y) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}\Delta y\sum_{\mu=1}^{n}\Phi_\nu$$

אנו נניח שאפשר לקחת את הגבול ב-m קודם מבלי להכנס להצדקות,

$$\iint dSf(x,y) = \lim_{n\to\infty}\Delta y\int_a^b dxf(x,y)$$

נסמן $\phi(y)=\int_a^b dx\, f(x,y)$ ואז

$$\begin{aligned}\iint dSf(x,y) &= \int_\alpha^\beta dy\,\phi(y)\\ &= \int_\alpha^\beta dy\int_a^b dxf(x,y)\end{aligned}$$

וברור שיכולנו באותה מידה לקבל

$$\iint dS\, f(x,y) = \int_a^b dx \int_\alpha^\beta dy\, f(x,y)$$

כלומר ניתן להחליף את סדר האינטגרציה. זה נותן לנו דרך לחשב את האינטגרל הכפול בעזרת חזרה על אינטגרלים רגילים.

תחומים לא מלבניים

אפשר לתאר תחום קמור על ידי פונקציות, $\psi_1(x), \psi_2(x)$. במקרה כזה ניתן לבצע קירוב של התחום על ידי קטעים אופקיים שמתוארים על ידי $\bar{\psi}_1(x), \bar{\psi}_2(x)$, ועבור כל אחד מהם להגדיר את האינטגרל הכפול כפי שהגדרנו אותו קודם, בעזרת הנוסחא עבור מלבן, בצורה כזו

$$\iint dS\, f(x,y) = \int_{x_0'}^{x_1'} dx \int_{\bar{\psi}_1(x)}^{\bar{\psi}_2(x)} dy\, f(x,y)$$

כאשר x_0', x_1' הקואורדינטות הקיצוניות של המתחם הממולבן שלנו. הרעיון הוא שכאשר δ, האורך הגדול ביותר של החלוקה שלנו, שואף לאפס, $\delta \to 0$, הפונקציות $\bar{\psi}$ מתקרבות ל-ψ. כלומר

$$\int_{\bar{\psi}_1(x)}^{\bar{\psi}_2(x)} dy\, f(x,y) \to \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy\, f(x,y)$$

ומכאן

$$\int_{x_0'}^{x_1'} dx \int_{\bar{\psi}_1(x)}^{\bar{\psi}_2(x)} dy\, f(x,y) \to \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy\, f(x,y)$$

בגבול הזה המצולע שלנו מתקרב לאיזור המקורי כלומר

$$\iint dS\, f(x,y) = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} dy\, f(x,y)$$

כמובן שאפשר לבצע טיעון דומה ולהגיע למסקנה

$$\iint dS\, f(x,y) = \int_{y_0}^{y_1} dy \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} dx\, f(x,y)$$

כאשר ה-ϕ משחקות תפקיד אנלוגי ל-ψ מקודם.

דוגמא

למשל,

$$\iint dxdy\, x^2 y^2, \qquad x^2 + y^2 \le 1$$

העיגול מקיים למעשה

$$-\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

כלומר

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy\, x^2 y^2 &= \int_{-1}^{1} dx\, x^2 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy \\
&= \int_{-1}^{1} dx\, x^2 \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \\
&= \frac{2}{3}\int_{-1}^{1} dx\, x^2 \left(1-x^2\right)^{3/2}
\end{aligned}$$

עכשיו

$$\begin{aligned}
x &= \cos\theta \\
dx &= -\sin\theta d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{3}\int_{\pi}^{0} \sin\theta d\theta\ \cos^2\theta \left(\sin^2\theta\right)^{3/2} &= \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} d\theta\ \cos^2\theta \sin^4\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} d\theta \left(\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\sin^2\theta \\
&= \frac{2}{3}\int_{0}^{\pi} d\theta \left(\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)^2 \frac{1}{2}\left(1-\cos 2\theta\right) \\
&= \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4\cdot 2}\int_{0}^{\pi} d\theta \sin^2 2\theta \left(1-\cos 2\theta\right) \\
&= \frac{1}{12}\int_{0}^{\pi} d\theta \sin^2 2\theta \left(1-\cos 2\theta\right)
\end{aligned}$$

עכשיו $\varphi = 2\theta$ וקיבלנו

$$\begin{aligned}
\frac{1}{12}\int_{0}^{2\pi} \frac{d\varphi}{2}\ \sin^2\varphi\left(1-\cos\varphi\right) &= \frac{1}{24}\left\{\int_{0}^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi - \int_{0}^{2\pi} d\varphi \sin^2\varphi\cos\varphi\right\} \\
&= \frac{1}{24}\left\{\frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} d\varphi\left(1-\cos 2\varphi\right) - \int_{0}^{2\pi} d\left(\sin\varphi\right)\sin^2\varphi\right\} \\
&= \frac{1}{24}\left\{\frac{1}{2}\cdot 2\pi - 0\right\} \\
&= \frac{\pi}{24}
\end{aligned}$$

החלק החשוב היה להגיע לצורה של אינטגרל רגיל.
עוד דוגמא:

$$\iiint \left(x^2+y^2+z^2\right) xyz\, dxdydz, \qquad x^2+y^2+z^2 < R^2$$

האינטגרל הזה מורכב משלושה מחוברים, הנה הראשון בשבהם

$$\iiint x^2 \cdot xyz\, dxdydz$$

עכשיו צריך לחלק את האינטגרציה לאינטגרלים מרובים

$$\int_{-R}^{R} dz\, z \int_{-\sqrt{R^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-z^2}} dy\, y \int_{-\sqrt{R^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-z^2-y^2}} dx\, x^3$$

האינטגרל על x הוא של פונקציה אי זוגית על תחום סימטרי ולכן אפס - מה שמאפס את כל התוצאה. שני המחוברים האחרים באינטגרל המקורי דומים למקרה הזה, ומ-תאפסים מאותה סיבה (רק בציר אחר).

7.6 החלפת משתנים

נביט באינטגרל $\iint_R dxdy\, f(x,y)$. המשתנים x,y הם רק דרך אחת לתאר את המישור. הבה נראה איך אפשר להחליף אותם. נניח טרנספורמציה פרימיטיבת שכזו

$$(x,y) \to (v,x)$$

כך ש-

$$x = x, y = \Phi(v,x)$$

ונניח $\Phi_v > 0$ בכל התחום הרלוונטי. על ידי הטרנספורמציה הזו, התחום R הופך לתחום B במישור xv. הקווים $x = \text{const.}$ נותרים בעינם, ואילו הקווים $v = v_0$ הופכים ל-

$$y = \Phi(v_0, x)$$

כלומר עקומים כלשהם, כאשר ערכים גדולים יותר של v_0 מתאימים לערכי y גדולים יותר. התחום R מחולק לפיכך למשטחונים R_i. הם מאופיינים על ידי סדרה של x-ים x_n וסדרה של v-ים v_m מרווחים על ידי $\Delta x, \Delta v$:

$$\Delta R_{mn} = \int_{x_n}^{x_n+\Delta x} dx\, \left[\Phi(v_m + \Delta v, x) - \Phi(v_m, x)\right]$$

כאשר Δv המרווח ב-v. לפי משפט ערך הביניים של החשבון האינטגרלי

$$\Delta R_{mn} = \Delta x \cdot [\Phi(v_m + \Delta v, \bar{x}_n) - \Phi(v_m, \bar{x}_n)]$$

וזה לפי משפט ערך הביניים של החשבון הדיפרנציאלי

$$\Delta R_{mn} = \Delta x \Delta v \cdot \Phi_v\left(\bar{v}_m, \bar{x}_n\right)$$

כאשר $\bar{x}_n, \bar{v}_m$ הם ערכים כלשהם בתוך התחום. כלומר האינטגרל שלנו הופך להיות

$$\iint_R dxdy\, f(x,y) = \lim \sum_{mn} \Delta x \Delta v\, f(\bar{x}_n, \Phi(\bar{x}_n, \bar{v}_m)) \cdot \Phi_v(\bar{v}_m, \bar{x}_n)$$
$$= \iint_B dxdv\, f(x, y(x,v))\Phi_v$$

עכשיו אנו מבצעים תעלול דומה, אלא שממפים את התחום B לתחום R' במישור uv על ידי הטרנספורמציה

$$x = \Psi(u,v)$$

כך ש-$\Psi_u > 0$ בכל התחום. יוצא באופן דומה לקודם

$$\iint_R dxdy\, f(x,y) = \iint_{R'} dudv\, f[\Psi(u,v),\Phi(u,v)]\Phi_v\Psi_u$$

עכשיו נשים לב כי

$$\begin{aligned}\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)} &= \frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(x,v)}\frac{\partial\,(x,v)}{\partial\,(u,v)}\\ &= \Phi_v\Psi_u\end{aligned}$$

כלומר

$$\boxed{\iint_R dxdy\, f(x,y) = \iint_{R'} dudv\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(u,v)}\, f(x(u,v),y(u,v))}$$

בשיטה שבה ביצענו את ההחלפה, נובע מיד כי היעקוביאן חיובי. למעשה אפשר להרשות גם שהוא יהיה אפס במספר סופי של נקודות מבודדות - העיקר שלא יחליף סימן (זה יהרוס את המונוטוניות שמאפשרת לפרוש את המישור על ידי עקומים עו-קבים).

דוגמא

הבא נבצע את הדוגמא מקודם בפולריות,

$$\iint dxdy\, x^2y^2, \qquad x^2+y^2 \le 1$$

עכשיו

$$\begin{aligned}x &= r\cos\varphi, y = r\sin\varphi\\ \frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(r,\varphi)} &= x_r y_\varphi - x_\varphi y_r\\ &= \cos\varphi\cdot r\cos\varphi + r\sin\varphi\cdot\sin\varphi\\ &= r\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}\iint dxdy\, x^2y^2 &= \iint rdrd\varphi\, x^2y^2\\ &= \iint rdrd\varphi\, r^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\\ &= \int_0^1 dr\, r^5\int_0^{2\pi} d\varphi\left(\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)^2\\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 dr\, r^5\int_0^{2\pi}\sin^2 2\varphi d\varphi\\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 dr\, r^5\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(1-\cos 4\varphi\right)d\varphi\\ &= \frac{1}{8}\int_0^1 dr\, r^5\left[\varphi|_0^{2\pi}\right]\\ &= \frac{\pi}{4}\int_0^1 dr\, r^5 = \frac{\pi}{4\cdot 6} = \frac{\pi}{24}\end{aligned}$$

אנו רואים כאן עוד נקודה. אם תחומי האינטגרציה בלתי תלויים, אפשר להכפיל פשוט אינטגרלים

$$\int_a^b du\int_\alpha^\beta dv f(u)g(v) = \left(\int_a^b du\, f(u)\right)\left(\int_\alpha^\beta dv\, f(v)\right)$$

כלומר יכולנו לרשום

$$\int_0^1 r^5dr\int_0^{2\pi} d\varphi\cos^2\varphi\sin^2\varphi$$

אנו עכשיו גם רואים פירוש חדש של היעקוביאן,

$$dxdy = \frac{\partial\left(x,y\right)}{\partial\left(u,v\right)}dudv$$

כלומר היעקוביאן מקשר את הנפחים הדיפרנציאליים סביב נקודה.

חישוב נפח של כדור

זה מאוד פשוט

$$V = \iiint_{x^2+y^2+z^2<R^2} dxdydz$$

את זה נהפוך לקואורדינטות כדוריות

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, y = r\sin\theta\sin\varphi, z = r\cos\theta$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(r,\theta,\varphi\right)} &= \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi\\ y_r & y_\theta & y_\varphi\\ z_r & z_\theta & z_\varphi\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}\sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi\\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi\\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0\end{vmatrix}\\ &= \ldots = r^2\sin\theta\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} V &= \iiint r^2 \sin\theta r dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \frac{R^3}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi \\ &= \frac{4\pi R^3}{3} \end{aligned}$$

דוגמא

חשבו את

$$I = \iint e^{\frac{y-x}{y+x}} dxdy$$

על המשולש שקודקודיו $(1,0)$, $(0,1)$, $(0,0)$. נשים לב שהקווים שתוחמים את המשולש הם $y = 0, x = 0, y + x = 1$. נגדיר את

$$\begin{aligned} u &= y + x \\ v &= y - x \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(u - v) \\ y &= \frac{1}{2}(u + v) \end{aligned}$$

ונקבל

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = x_u y_v - x_v y_u = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

לכן

$$I = \frac{1}{2} \iint dudv\, e^{\frac{v}{u}}$$

נתרגם את התחום: יש לנו

$$\begin{aligned} y = 0 &\to u = -v \\ x = 0 &\to u = v \\ y + x = 1 &\to u = 1 \end{aligned}$$

אז

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int_0^1 du \int_{-u}^{u} dv\, e^{\frac{v}{u}} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 du\, \left\{ue^{v/u}\right\}_{-u}^{u} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 du\, u\left(e^1 - e^{-1}\right) \\
&= \int_0^1 du\, u \sinh 1 \\
&= \sinh 1 \cdot \frac{u^2}{2}|_0^1 = \frac{1}{2}\sinh 1
\end{aligned}$$

דוגמא

חשבו את

$$\iiint dxdydz$$

על האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$, כלומר למעשה את נפח האליפסואיד. ובכן,

$$\xi = x/a, \eta = y/b, \zeta = z/c$$

ונקבל

$$\frac{\partial\left(x,y,z\right)}{\partial\left(\xi,\eta,\zeta\right)} = x_\xi y_\eta z_\zeta = abc$$

בקואורדינטות החדשות יש לנו כדור יחידה,

$$\iiint d\xi d\eta d\zeta \cdot abc = (abc)\iiint d\xi d\eta d\zeta = \frac{4\pi abc}{3}$$

7.7 אינטגרלים לא אמיתיים

גם במקרה של אינטגרלים מרובים יש לנו את הנושא של תחומי אינטגרציה אינסופיים, וכמו כן את הנושא של נקודות סינגולריות של האינטגרנד.

7.7.1 תחום אינטגרציה אינסופי

אנו נתייחס כאן לתחום אינסופי של אינטגרציה במישור כדי להבין איך להגדיר נכון אינטגרלים כאלה. נניח שהתחום R הוא כל מישור xy. עכשיו תהי R_n סדרה של

תחומים כך שכל תחום סופי B במישור, מוכל לגמרי בכל ה-R_n עבור $n > m$ כאשר m הוא מספר טבעי כלשהו. כדוגמא, נוכל לקחת את

$$K_n = \left\{(x,y)\,|x^2+y^2 \le n^2\right\}$$

כלומר כל המעגלים עם רדיוס שלם.

כדוגמא לאינטגרל כזה נביט ב-

$$J = \iint_R dxdy\, e^{-x^2-y^2}$$

על כל המישור. הבה נחשב את J_n האינטגרל על התחום K_n:

$$\begin{aligned} J_n &= \int_{K_n} dxdy\, e^{-x^2-y^2} \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^n rdr\, e^{-r^2} \\ &= 2\pi \int_0^n rdr\, e^{-r^2} \\ &= \pi \int_0^{n^2} d\left(r^2\right) e^{-r^2} \\ &= \pi \left[-e^{-r^2}\right]_0^{r=n} \\ &= \pi \left[1-e^{-n^2}\right] \end{aligned}$$

ולכן ערכו של האינטגרל הוא

$$J = \lim_{n\to\infty} J_n = \pi$$

צריך עוד להראות שזה לא תלוי בבחירה המסויימת K_n, כאשר יש עוד אינסוף דרכים לבחור את התחומים האלה. יהיו R_n לפיכך תחומים כלשהם ש"שואפים" לכסות את כל המישור, כפי שהגדרנו קודם. עכשיו, לכל K_m יש איזה R_ν שמכיל אותו, לפי הנחה. כמו כן ל-R_ν הזה קיים K_n שמכיל אותו, כלומר

$$K_m \subseteq R_\nu \subseteq K_n$$

ומאחר שהאינטגרנד שלנו חיובי תמיד,

$$\int_{K_m} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \int_{R_\nu} e^{-x^2-y^2} dxdy \le \int_{K_n} e^{-x^2-y^2} dxdy$$

כאשר $\nu \to \infty$ שני הצדדים של הסנדביץ' שואפים לאותו גבול ולכן

$$\iint_R dxdy\, e^{-x^2-y^2} = \pi$$

עכשיו, בפועל לא היינו נכנסים לכל הסיפור הזה, אלא היינו מחשבים ישירות

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-x^2-y^2} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} dr\, re^{-r^2} = \pi$$

על ידי החלפת משתנים. אבל חשוב לדעת כיצד ההגדרות האלה בנויות. תוצאה מעניינת שאפשר לקבל מכאן

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{-y^2} &= \pi \\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2}\right)^2 &= \pi \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-x^2} &= \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

הבה נכליל מעט את התוצאה הזו

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-tx^2} &=? \\ u = \sqrt{t}x du &= \sqrt{t}dx \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{t}} e^{-u^2} &= \frac{1}{\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} du\, e^{-u^2} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{t}}\end{aligned}$$

7.7.2 נקודות סינגולריות

אם לפונקציה יש אי רציפות סופית, אפשר לחלק את תחום האינטגרציה לתתי-תחומים שבכל אחד מהם הפונקציה רציפה, ולסכום את האינטגרל על כולם. אם יש נקודה עם התבדרות (הפונקציה הולכת לאינסוף), אז הדרך להגדיר את האינטגרל הלא-אמיתי היא לחתוך החוצה את הנקודה הבעייתית עם סדרה של תחומים U_n שכולם כוללים את הנקודה וששואפים לתחום ריק כאשר n גדל ללא גבול. אם הגבול

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{R-U_n} dxdy\, f(x,y)$$

קיים אז הוא ערכו של האינטגרל. למשל

$$\iint \frac{dxdy}{(x^2+y^2)^{\alpha/2}}$$

על תחום שכולל את הראשית. כדי לראות את ההתנהגות של הסינגולריות בראשית, נביט בתרומה לאינטגרל מהתחום $r < \epsilon$

$$\begin{aligned}\iint rdrd\varphi \frac{1}{r^\alpha} &= 2\pi \int_0^\epsilon dr\, r^{1-\alpha} \\ &= 2\pi \frac{\epsilon^{2-\alpha}}{2-\alpha}\end{aligned}$$

כאשר $\epsilon \to 0$, זה מתכנס אם ורק אם

$$\begin{aligned} 2-\alpha &> 0 \\ 2 &> \alpha \end{aligned}$$

ולכן כל האינטגרל יתכנס או יתבדר בהתאם. כאן גם צריך להראות שזה לא תלוי בבחירה של המעגלים $\epsilon < r$ דווקא - ההוכחה דומה לזו שעשינו עבור תחום האינטגרציה האינסופי בדוגמא הקודמת. בפועל, אנחנו מחשבים בלי להכנס לשיקולים המדוייקים בדרך כלל.

7.8 דוגמאות

1. חשבו את

$$\iint \frac{dxdy}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

על הלולאה הימנית של הצורה

$$\left(x^2+y^2\right)^2-\left(x^2-y^2\right)=0$$

פתרון:

נעבור לפולריות

$$\begin{aligned} r^4-r^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right) &= 0 \\ r^2 &= \cos^2\varphi-\sin^2\varphi \\ &= \cos 2\varphi \end{aligned}$$

הנוסחא הזו מוגדרת כמובן עבור ערכים של φ שעבורם

$$\cos 2\varphi \geq 0$$

הפונקציה הזו מחזורית עם מחזור π. ה-$\cos 2\varphi > 0$ לפיכך עבור

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

וגם זה ועוד π

$$\frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{4}$$

הציור מתחיל ב-$r(0)=1$ ומצייר שתי אונות, בטווחי הזוויות שראינו. אנו צריכים לפיכך את

$$\begin{aligned} \int \frac{rdrd\varphi}{\left(1+r^2\right)^2} &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{r^2=\cos 2\varphi} \frac{rdr}{\left(1+r^2\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{\cos 2\varphi} \frac{du}{\left(1+u\right)^2} \end{aligned}$$

כאשר השתמשנו ב-$u = r^2$. עכשיו,

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi\,(1+u)^{-1}\,|_0^{\cos 2\varphi} &= \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi\left[1-(1+\cos 2\varphi)^{-1}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\pi}{2}-\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{d\varphi}{1+\cos 2\varphi}\right\} \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{d\varphi}{2\cos^2\varphi} \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{tg}\varphi|_{-\pi/4}^{\pi/4} \\
&= \frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}\{1-(-1)\} = \frac{\pi-2}{4}
\end{aligned}$$

2. חשבו את

$$\iint \left(x^4-y^4\right)e^{xy}dxdy$$

על התחום ברבע הראשון שתחום על ידי

$$xy=1, xy=3, x^2-y^2=3, x^2-y^2=4$$

פתרון: הגבולות של התחום מרמזים לנו על

$$u=xy, v=x^2-y^2$$

ואז

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} &= u_x v_y - u_y v_x \\
&= y(-2y) - x2x \\
&= -2\left(x^2+y^2\right)
\end{aligned}$$

עכשיו $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ הוא ההופכי של זה ולכן

$$\begin{aligned}
\iint dudv\left|\frac{1}{2\left(x^2+y^2\right)}\right|\left(x^4-y^4\right)e^u &= \frac{1}{2}\iint dudv\, e^u\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}\\
&= \frac{1}{2}\iint dudv\, e^u\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}\\
&= \frac{1}{2}\iint dudv\, e^u\left(x^2-y^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\iint dudv\, e^u v\\
&= \frac{1}{2}\int_1^3 du\, e^u\int_3^4 dv\, v\\
&= \frac{1}{2}\left(e^3-e\right)\left.\frac{v^2}{2}\right|_3^4\\
&= \frac{e\left(e^2-1\right)}{4}\left(4^2-3^2\right)\\
&= \frac{7e\left(e^2-1\right)}{4}
\end{aligned}$$

היעקוביאן יצא לנו שלילי, אבל הוא לא מחליף סימן. הסיבה היא שאי שם יש טרנספורמציה פרימיטיבית שהיא מונוטונית יורדת ולא מונוטונית עולה. בסופו של דבר היה ניתן להפוך לא את הסימן על ידי מעבר נוסף למשל ל-$(u,-v)$. דרך אחרת היא להגדיר את גבולות המלבן במישור uv איך שנוח לנו ולקחת את היעקוביאן בערך מוחלט. הרבה ספרים רושמים את הנוסחא הכללית כך

$$\iint dxdy\, f(x,y)=\iint dudv\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|f\left[x(u,v),y(u,v)\right]$$

כאשר באופן מרומז, הגבולות נלקחים ב-u,v מערכים נמוכים לערכים גבוהים.

3. חשבו את

$$\iint\frac{\sin\left(x-y\right)}{\cos\left(x+y\right)}dxdy$$

כאשר התחום הוא המשולש התחום על ידי $y=0, y=x, x+y=\pi/4$

$$\begin{aligned}
\iint \frac{dudv}{2}\frac{\sin v}{\cos u} &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} du \int_0^u dv \frac{\sin v}{\cos u} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} du \left[\frac{-\cos v}{\cos u}\right]_{v=0}^{v=u} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} du \frac{1-\cos u}{\cos u} \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} du \left[\frac{1}{\cos u} - 1\right] \\
&= \frac{1}{2}\left\{\int_0^{\pi/4} \frac{du}{\cos u} - \frac{\pi}{4}\right\}
\end{aligned}$$

עכשיו

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \frac{du}{\cos u} &= \frac{1}{2}\ln \frac{1+\sin u}{1-\sin u}\Big|_0^{\pi/4} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}{2-1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{2}+1\right)^2 \\
&= \ln\left(\sqrt{2}+1\right)
\end{aligned}$$

ולכן

$$\iint \frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)}dxdy = \frac{1}{2}\left\{\ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \frac{\pi}{4}\right\}$$

4. חשבו את

$$\iiint (z-y)^2\, xy\, dxdydz$$

על הנפח התחום על ידי $x=1, x=3, z=y, z=y+1, xy=2, xy=4$.

פתרון: הגבולות וגם האינטגרנד מרמזים על $w=xy$ כהצבה טובה. האינטגרנד רומז על $v=z-y$. נשאיר את $u=x$ ונראה

$$\frac{\partial(x,v,w)}{\partial(x,y,z)} = v_y w_z - v_z w_y = -x$$

$$\iiint \frac{dxdvdw}{|-x|}v^2 w = \int dxdvdw\, \frac{1}{x}v^2 w$$

הגבולות שלנו הם $x=0, x=3, w=2, w=4, v=0, v=1$ ולכן

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{dx}{x}\int_0^1 dv\, v^2 \int_2^4 dw\, w &= \ln 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4^2-2^2}{2}\\ &= 2\ln 3\end{aligned}$$

פרק 8

מספרים מרוכבים

8.1 בסיס

מספר מרוכב הוא זוג סדור

$$z = (a, b)$$

כאשר $a, b \in \mathbb{R}$. מגדירים עליהם חיבור וכפל

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

נשים לב כי

$$(a, b)(1, 0) = (a, b)$$

כלומר יש טעם לחשוב על $(1, 0)$ כעל "אחד" - זה כשאשר כופלים בו, לא קורה כלום.
זה רומז לנו שאפשר לזהות כל מספר ממשי x עם מספר מרוכב $(x, 0)$. בדיקה זריזה של כלל הכפל תראה לנו שזה מצליח,

$$(x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$$
$$(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0)$$

כדי להגדיר חילוק נשים לב שלכל מספר יש את ההופכי שלו

$$\left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right) \cdot (a, b) = (1, 0)$$

ועכשיו אפשר להגדיר חילוק על ידי כפל בהופכי, חוץ מעבור המספר $(0, 0)$ שאותו נזהה כ"אפס".
עכשיו נשים לב למספר המיוחד

$$i = (0, 1)$$

הוא מעניין מכיוון ש-

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (-1,0)$$

כלומר

$$i^2 = -1$$

כי $(-1,0)$ מזוהה עם המספר הממשי -1. ביחד עם הכללים שלנו אפשר לראות ש-

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1)$$

או

$$(a,b) = a + ib$$

בדרך כלל מסמנים מספרים מרוכבים ב-z

$$z = a + ib$$

כאשר $a, b \in \mathbb{R}$. המספר a נקרא "החלק הממשי" של z והמספר b נקרא "החלק המדומה" של z,

$$\begin{aligned} a &\equiv \Re z \equiv \operatorname{Re} z \\ b &= \Im z \equiv \operatorname{Im} z \end{aligned}$$

לא להתבלבל, "החלק המדומה" הוא מספר ממשי.

מספר מהצורה

$$z = iy$$

כאשר $y \in \mathbb{R}$ נקרא "דמיוני טהור" או "מדומה טהור". i גם נקרא "היחידה הדמיונית".

הבה ננסה משהו

$$\begin{aligned} (a+ib)(c+id) &= ac + iad + ibc + i^2bd \\ &= ac - bd + i(bc + ad) \end{aligned}$$

כלומר, אפשר לעבוד עם מספרים מרוכבים כרגיל, בלי לחשוב על זה יותר מדי.

לכל מספר מרוכב יש את המספר הצמוד לו

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ z^* &= x - iy \end{aligned}$$

לפעמים מסמנים את z^* ב-$\bar{z}$. עדיף עם כוכבית. נשים לב כי

$$\begin{aligned} zz^* &= (x+iy)(x-iy) \\ &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

מגדירים בעזרת זה את הערך המוחלט של מספר

$$|z| = \sqrt{z^* z} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

הנה ההופכי

$$\frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

בדיוק כפי שמצאנו קודם לכן.

8.2 שורש ריבועי

אפשר למצוא את השורש של מספר מרוכב בצורה מפורשת. נניח שאנו רוצים את השורש של $\zeta = \alpha + i\beta$. נסמן $z = x + iy$ ונדרוש

$$z^2 = (x+iy)^2 = \alpha + i\beta = \zeta$$

כלומר

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \alpha \\ 2xy &= \beta \end{aligned}$$

הגודל של השורש הוא $x^2 + y^2$. נשים לב כי

$$\begin{aligned} \left(x^2+y^2\right)^2 &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 \\ &= x^4 + y^4 - 2x^2y^2 + 4x^2y^2 \\ &= \left(x^2 - y^2\right)^2 + 4x^2y^2 \\ &= \alpha^2 + \beta^2 \end{aligned}$$

כלומר

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} = |\zeta|$$

כלומר

$$|z| = \sqrt{|\zeta|}$$

יש לנו

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \\ x^2 - y^2 &= \alpha \end{aligned}$$

מכאן

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{1}{2}\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right) \\ y^2 &= \frac{1}{2}\left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\right) \end{aligned}$$

שני הביטויים באגפי ימין אי-שליליים, כך ש-x, y ממשיים קיימים. לכאורה יש כאן 4 אפשרויות, אך בגלל $2xy = \beta$ יש מגבלה, כך שלמעשה יש רק שני פתרונות

$$\sqrt{\zeta} = \pm\left(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2} + i\frac{\beta}{|\beta|}\sqrt{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{2}}\right)$$

עבור $\beta \neq 0$. אם $\beta = 0$ אז הפתרונות הם $\pm\sqrt{\alpha}$ או $\pm i\sqrt{-\alpha}$ תלוי בסימן של α.

למספרים המרוכבים אין סדר, ולכן אין דרך להחליט מי משני השורשים הוא ה"שלילי".

8.3 המישור המרוכב וכדור רימן

אנו מסתכלים הרבה פעמים על המספרים המרוכבים כעל מישור, ומשתמשים בקואור-דינטות פולריות

$$
\begin{aligned}
z &= x + iy \\
&= r\cos\varphi + ir\sin\varphi \\
&= r\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)
\end{aligned}
$$

יש הצגה גיאומטרית יפה של מספרים מרוכבים שנקראת כדור רימן. יהי $z = x + iy$, שמתאים לנקודה במישור. נחשוב על כדור יחידה, שקו המשווה שלו הוא מעגל היחידה במישור המרוכב, והקואורדינטות של נקודה עליו הן (ξ, η, ζ). עכשיו נמתח קו מהנקודה z על המישור אל הקוטב הצפוני של הכדור $(0, 0, 1)$. ניתן לתאר קו כזה כך

$$
(tx, ty, 1 - t)
$$

כך שעבור $t = 0$ יש לנו $(0, 0, 1)$, כלומר הקוטב הצפוני, ועבור $t = 1$ יש לנו $(x, y, 0)$, כלומר הנקודה על המישור. הקו הישר הזה, כך מסתבר, חותך את כדור היחידה. נחפש את נקודת החיתוך:

$$
\begin{aligned}
t^2x^2 + t^2y^2 + (1-t)^2 &= 1 \\
t^2|z|^2 + (1-t)^2 &= 1 \\
t^2|z|^2 + (1-t)^2 - 1 &= 0 \\
t^2\left|z\right|^2 - 2t + t^2 &= 0 \\
t^2\left(1 + |z|^2\right) - 2t &= 0
\end{aligned}
$$

פתרון אחד הוא כמובן $t = 0$, כלומר הקוטב הצפוני. השני הוא

$$
\begin{aligned}
t\left(1 + |z|^2\right) &= 2 \\
t &= \frac{2}{1 + |z|^2}
\end{aligned}
$$

כלומר הנקודה

$$
\begin{aligned}
\xi &= tx = \frac{t}{2}\left(z + z^*\right) = \frac{z + z^*}{1 + |z|^2} \\
\eta &= ty = \frac{t}{2i}\left(z - z^*\right) = \frac{z - z^*}{i\left(1 + |z|^2\right)} \\
\zeta &= 1 - t = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}
\end{aligned}
$$

אנו יכולים לראות שכאשר $|z| \to \infty$ אנו מקבלים $t = 0$ כלומר את הקוטב הצפוני שוב. גיאומטרית, הקו שמחבר את הקוטב הצפוני לנקודה במישור, שואף לקו אופקי שמשיק לקוטב הצפוני כאשר הנקודה במישור שואפת לאינסוף. אם אנו מוסיפים את

"הנקודה באינסוף" למישור המרוכב, אז כדור היחידה מהווה ייצוג שלם של המישור המרוכב המורחב (כולל הנקודה באינסוף).

בהקשר הזה, כדור היחידה נקרא "כדור רימן". אפשר לשים לב גם שחצי הכדור הצפוני מתאים לנקודות מחוץ למעגל היחידה, וחצי הכדור הדרומי מתאים לנקודות בתוך מעגל היחידה (מעגל היחידה כמובן מתאים לעצמו).

8.4 אקספוננציאל מרוכב

אנו נשתמש בטור טיילור של האקספוננט, וננחש שאפשר להגדיר בעזרתו אקספוננט מרוכב (התיאוריה המתמטית מאחורי ה"המשכה" הזו היא לא טריביאלית, אך לנו אין זמן לזה עכשיו). אם כך,

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

בפרט, אם $\varphi \in \mathbb{R}$

$$e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \varphi^n}{n!}$$

עכשיו

$$\begin{aligned} &i^0 = 1, i^2 = -1, i^4 = 1, i^6 = -1, \ldots \\ &i^1 = i, i^3 = -i, i^5 = i, i^7 = -i, \ldots \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} i^{2k} &= (-1)^k \\ i^{2k+1} &= (-1)^k\, i \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}\varphi^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k+1}\varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \varphi^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \left\{1 - \frac{\varphi}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \cdots\right\} \\ &\quad + i \left\{\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \cdots\right\} \end{aligned}$$

כלומר

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

נוסחא זו נקראת נוסחת אוילר[1]. בפרט יש לה מקרה פרטי מפורסם $e^{i\pi}=-1$ או

$$e^{i\pi}+1=0$$

הנוסחא שמקשרת את כל המספרים החשובים: $e,\pi,i,1,0$. אנו יכולים בקלות להשתמש בנוסחת אוילר כדי להוכיח זהויות טריגונומטריות, למשל

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha}e^{i\beta} \\ \cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta) &= (\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta) \end{aligned}$$

ומכאן

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \end{aligned}$$

והכללות של הטריק הזה, למשל נוסחת דה-מואבר

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

באופן כללי אם כן

$$e^z=e^{x+iy}=e^xe^{iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$$

תכונה חשובה שנשתמש בה יותר מאוחר היא זו: יהי t משתנה ממשי ותהי

$$f(t)=e^{zt}$$

כאשר t מרוכב. מה הנגזרת?

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[e^{xt+iyt}\right] \\ &= \frac{d}{dt}\left[e^{xt}(\cos yt+i\sin yt)\right] \end{aligned}$$

נחשב בנפרד

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[e^{xt}\cos yt\right] &= xe^{xt}\cos yt-e^{xt}y\sin yt=e^{xt}(x\cos yt-y\sin yt) \\ \frac{d}{dt}\left[e^{xt}\sin yt\right] &= xe^{xt}\sin yt+e^{xt}y\cos yt=e^{xt}(x\sin yt+y\cos yt) \end{aligned}$$

ועכשיו

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{d}{dt}\left[e^{xt}\cos yt\right]+i\frac{d}{dt}\left[e^{xt}\sin yt\right] \\ &= e^{xt}(x\cos yt-y\sin yt)+ie^{xt}(x\sin yt+y\cos yt) \\ &= e^{xt}\left[(x+iy)\cos yt+(ix-y)\sin yt\right] \\ &= e^{xt}\left[(x+iy)\cos yt+i(x+iy)\sin yt\right] \\ &= e^{xt}(x+iy)(\cos yt+i\sin yt) \\ &= ze^{xt}e^{iyt}=ze^{zt} \end{aligned}$$

[1] כמו שאר הנוסחאות.

התוצאה היא לפיכך מה שהיינו רוצים

$$\frac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$$

גם כאשר z מרוכב.

8.5 יצוג אקספוננציאלי

אנו עכשיו יכולים לייצג מספר מרוכב כללי בעזרת נוסחת אוילר

$$\begin{aligned} z &= r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \\ &= re^{i\theta} \end{aligned}$$

ומכאן נוסחאות אלטרנטיביות לכפל:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

נשים לב כי עבור $\varphi \in \mathbb{R}$

$$|e^{i\varphi}| = 1$$

לעיתים קוראים למספרים כאלה "פקטורי פאזה".

8.6 שורשי היחידה

נביט במשוואה

$$z^n = 1$$

ונרשום אותה כך

$$z^n = e^{i2\pi}$$

מכאן יוצא

$$z = e^{i\frac{2\pi}{n}}$$

אבל מסתבר שזה אינו הפתרון היחיד, כי למשל

$$\left(e^{i2\pi k/n}\right)^n = e^{i2\pi k} = 1$$

כאשר k שלם. לפיכך כל הפתרונות

$$e^{i\frac{2\pi k}{n}}$$

הם טובים, רק צריך לשים לב, שעבור $n > k$, למשל $k = n + q$ כאשר $n < q$ אנו מקבלים

$$e^{i\frac{2\pi(n+q)}{n}} = e^{i2\pi}e^{i2\pi q/n} = e^{i2\pi q/n}$$

כלומר מתוך כל $e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ האפשריים יש רק n בלתי תלויים, ואלה הם

$$e^{i\frac{2\pi k}{n}}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

למשל הפתרונות של $z^3 = 1$ הם

$$z = 1, e^{i\frac{2\pi}{3}}, e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

מקרה המוכר לנו במיוחד הוא

$$z^2 = 1 \Rightarrow z = 1, e^{i\pi}$$

כלומר $z = 1, -1$.

ראינו אם כן, שיש n פתרונות מרוכבים למשוואה $z^n = 1$. לזה יש הכללה שנקראת המשפט היסודי של האלגברה והוא שלכל משוואה פולינומיאלית מעל ממעלה n יש n פתרונות (לעיתים הם חוזרים על עצמם - כלומר יש לספור את הריבוב שלהם).

אם למשוואה פולינומיאלית יש מקדמים ממשיים, קל לראות שאם z הוא שורש של המשוואה, אזי גם z^* יהיה. הדוגמא הקנונית היא $z^2 = -1$ שפתרונותיה הם $z = \pm i$, שהם מספרים צמודים. דוגמא אחרת תהיה הפתרונות של משוואה ריבועית עם מקדמים ממשיים

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

אם השורש הוא מספר מדומה, אנו מקבלים

$$z = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{2a}$$

ושוב, שני הפתרונות צמודים זה לזה. דוגמא קונקרטית היא

$$\begin{aligned} z^2 - 6z + 10 = 0 & \\ z &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 10}}{2} \\ &= \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \\ &= \frac{6 \pm 2i}{2} \\ &= 3 \pm i \end{aligned}$$

8.7 קצת תרגילים

1. מה התחום במישור המתואר על ידי

   (א) $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$

(ב) $\left|\frac{z-\alpha}{z+\alpha}\right| < 1$ כאשר $\alpha \in$

(ג) $\Im\left(\frac{1}{z}\right) < 1$

פתרון:

(א) ובכן

$$|z-i| < |z+i|$$

ז"א אלה כל ה-z שקרובים יותר ל-i מאשר ל-$-i$. לאחר קצת מחשבה (פירוק לרכיבים)

$$\begin{aligned} |z-i|^2 &< |z+i|^2 \\ x^2 + (y-1)^2 &< x^2 + (y+1)^2 \\ |y-1| &< |y+1| \end{aligned}$$

כלומר כל הנקודות שמקיימות זאת הן

$$\{z|\,|y-1| < |y+1|\}$$

כלומר

$$\{z|\Im z > 0\}$$

(ב) זה בדיוק כמו הקודם, כלומר אלה הנקודות ב"חצי המישור" של α.

2. הפעם

$$\begin{aligned} \frac{1}{z} &= \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} \\ \Im\frac{1}{z} &= -\frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

כלומר

$$-\frac{y}{|z|^2} > 0$$

זאת אומרת כל ה-z עם

$$\{z|\Im z < 0\}$$

8.8 תכונות המיפוי של פונקציות

פונקציות של משתנה מרוכב מגדירות למעשה מיפוי של עקומים מהמישור המרוכב לעצמו. אנו רושמים

$$w = f(z)$$

ויש לנו "מישור z" ו"מישור w". למשל,

$$w = z^2$$

נפרט את זה

$$w = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

אז למשל הקו $x = x_0, y = t$ הופך ל-

$$w = x_0^2 - t^2 + 2ix_o t$$

ואם זה $y = y_0, x = t$ אזי

$$w = t^2 - y_0^2 + 2iy_0 t$$

כלומר זה מיפוי של קווים ישרים לפרבולות נחמדות.

8.9 נקודות הסתעפות וענפים - פונקציות רב-ערכיות

8.9.1 נקודת הסתעפות

בהנתן הקשר $w = f(z)$, נקודת הסתעפות היא נקודה שכאשר מקיפים אותה במישור z במעגל קטן מספיק, הפונקציה $w = f(z)$ משתנה באופן רציף, אך אינה חוזרת לערכה המקורי. הדוגמא הכי קלה היא $f(z) = \arg z$ כאשר אנו מסתכלים על הראשית. כל הקפה של הראשית נותנת לנו תוספת של 2π. דוגמא נוספת היא

$$f(z) = \sqrt{z} = z^{1/2}$$

באופן נאיבי

$$f(z) = \sqrt{r} e^{i\theta/2}$$

למשל

$$f(1) = 1$$

אבל

$$f(e^{i2\pi}) = e^{i\pi} = -1$$

כלומר כאשר עשינו סיבוב סביב הראשית, הפונקציה לא חזרה לערכה המקורי. אנו נראה אחר כך שזו נקודת ההסתעפות היחידה (הסופית) של $\sqrt{z}$.

8.9.2 הלוגריתם

עבור הלוגריתם, נראה ש-$z_0 \neq 0$ אינה נקודת הסתעפות:

$$f(z) = \log z = \ln|z| + i\theta$$

כאשר צריך לבחור איזה תחום של θ, נניח $\theta \in (0, 2\pi]$. עכשיו

$$z - z_0 = Re^{i\varphi}$$

כאשר R קטן מספיק כך שהראשית לא נכללת במעגל. אז מציור של הקשר הזה אפשר לראות

$$z = x_0 + R\cos\varphi + i\left(y_0 + R\sin\varphi\right)$$

כלומר z פונקציה מחזורית של φ ולכן על הענף $\theta \in (-\pi, \pi]$ הוא חוזר בדיוק לערכו המקורית, כולל הזווית θ, ולכן

$$\log z = \ln r + i\theta$$

חוזר גם הוא לערכו המקורי. אבל אם $z_0 = 0$, ברור לנו שגם עבור מעגל קטן מאוד, θ מקיפה את הראשית ולכן יש רב-ערכיות והנקודות $\theta = -\pi, \pi$ הן עם ערכים שונים. לפיכך זו נקודת הסתעפות.

נביט רגע ב-

$$\ln\frac{1}{z} = -\ln z$$

ברור מיד שגם ל-$\ln\left(z^{-1}\right)$ יש נקודת הסתעפות ב-$z = 0$ ולכן ל-$\ln z$ יש נקודת הסתעפות באינסוף. אנו "פותרים" את הבעיה ע"י הוצאת הקו $x \leq 0$ מהמישור (קוראים לזה "חתך"), ואז אין לנו בעיה יותר. אנו בוחרים תחומים זרים של θ

$$-\pi + 2\pi k < \theta \leq \pi + 2\pi k$$

כאשר $k \in \mathbb{N}$ ולכל חלק כזה בונים מישור מרוכב משלו. אפשר לדמיין שהמישורים מתחברים אלה לאלה ויוצרים "משטח רימן". הענף הראשי של הלוג הוא

$$\operatorname{Log} z = \ln r + i\theta, -\pi < \theta \leq \pi$$

8.9.3 השורש וחזקות אחרות

עוד דוגמא היא

$$f(z) = \sqrt{z}$$

או

$$w = z^{1/2}$$

ואז למשל $w_\pi = i\sqrt{r}, w_{-\pi} = -i\sqrt{r}$. זה יקרה אפילו ל-$r$ קטן שרירותי, ולכן יש לנו נקודת הסתעפות ב-$z = 0$. אין נקודות הסתעפות נוספות, לפי אותו הגיון של המקרה הקודם.

דוגמא מוכללת יותר היא החזקה

$$w = z^\alpha = e^{\alpha \log z}$$

(תמיד, לא חשוב הענף $e^{\log z} = z$ אף כי $z \neq \log e^z$). עכשיו אנו חוזרים לאותו עניין של $\log z$

$$\begin{aligned} w &= e^{\alpha[\ln r + i\theta]} \\ &= e^{\alpha \ln r} e^{i\alpha\theta} \end{aligned}$$

יוצא שעבור סיבוב שלם ההבדל ב-w הוא

$$\Delta w = e^{\alpha \ln r}\left(e^{i2\pi\alpha} - 1\right)$$

אם α שלם, אז אין הבדל ואין הסתעפות, אבל עבור α ממשי שאינו שלם - יש הסתעפות. כמו כן הפונקציה

$$w\left(1/z\right) = z^{-\alpha} = e^{\log z^{-\alpha}} = e^{-\alpha \ln r - i\alpha\theta}$$

סובלת בדיוק מאותה בעיה, כלומר יש לנו נקודת הסתעפות באינסוף.

באופן מוכלל יותר, עבור N סיבובים

$$\Delta w = e^{\alpha \ln r}\left(e^{i2\pi N\alpha} - 1\right)$$

ואנו יכולים לקבל שאין הבדל אם $\alpha = \frac{M}{N}$ רציונלי, ואז יש לנו נקודת הסתעפות מסדר $N - 1$.

למשל

$$w = z^{1/n}$$

במקרה כזה אחרי סיבוב אחד ב-z כיסינו רק $2\pi/n$ ממישור w, לכן אנו נצטרך n מישורים שיהוו את משטח רימן.

פרק 9

משוואות דיפרנציאליות מסדר שני

9.1 משוואות מסדר שני

משוואה דפרנציאלית מסדר שני היא באופן כללי מהצורה

$$\ddot{y} = \Phi\left(t, y, \dot{y}\right)$$

המשוואה היא *ליניארית* אם

$$\Phi\left(t, y, \dot{y}\right) = g(t) - p(t)\dot{y} - q(t)y$$

כלומר היא ליניארית ב-y וב-y'. מכאן

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = g(t)$$

אם המשוואה לא בצורה זו[1], אנו נביא אותה לצורה הזו. אם יש נקודות בעיתיות, זה דורש מחשבה תוך כדי ואחרי שקיבלנו את הפתרון. כל משוואה שאינה כזו היא *לא ליניארית*. בעיה עם תנאי התחלה מכילה, בנוסף למשוואה, תנאים

$$y(t_0) = y_0, \qquad y'(t_0) = y'_0$$

אם $g(t) \equiv 0$ המשוואה נקראת *הומוגנית*[2], אם לא, היא נקראת *אי-הומוגנית*.

9.2 משפט קיום ויחידות

תהי משוואה

$$\ddot{y} + p(t)\dot{y} + q(t)y = g(t)$$

עם תנאי ההתחלה $y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$, ונתון שהפונקציות p, q, g רציפות בקטע פתוח מסויים I. אזי בקטע הזה יש פתרון $y = \phi(t)$ יחיד.

[1] למשל $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = G(x)$, אם $P(x) \neq 0$ אפשר לחלק בו ולקבל משוואה מהצורה שאנו רוצים

[2] להבדיל מהשימוש של המילה הזו עבור משוואות מהצורה $y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$

9.3 דוגמא

נתחיל מדוגמא פשוטה

$$\ddot{y}-y=0$$

הנה שני פתרונות, e^{-t},e^{t}. אפשר לסמן אותם $y_1=e^{t},y_2=e^{-t}$. מסתבר מיד שגם

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

מקיימת את המשוואה:

$$\begin{aligned} y'' &= c_1y_1''+c_2y_2'' \\ &= c_1y_1+c_2y_2=y \end{aligned}$$

(משל). למשל, $\sinh x,\cosh x$ הם גם פתרונות של משוואה זו. זו תכונה כללית של משוואות ליניאריות - שקומבינציה ליניארית של פתרונות היא גם פתרון. אם יש לנו גם תנאי התחלה, למשל $y(0)=2,\dot{y}(0)=-1$ נקבל

$$\begin{aligned} y(0) &= 2=c_1+c_2 \\ y'(0) &= -1=c_1-c_2 \\ 1 &= 2c_1 \\ 3 &= 2c_2 \end{aligned}$$

כלומר $c_1=\frac{1}{2},c_2=\frac{3}{2}$ וקיבלנו

$$y=\frac{1}{2}e^{t}+\frac{3}{2}e^{-t}$$

9.4 ליניאריות

קל לראות שהעקרות הלינארי מתקיים גם עבור המשוואה הכללית

$$a\ddot{y}+b\dot{y}+c=0$$

כאשר רושמים אותה כך

$$Ly=0$$

כאשר

$$L=a\frac{d^2}{dt^2}+b\frac{d}{dt}+c$$

ו-L הוא אופרטור דיפרנציאלי. מהצורה של L ברור מיד כי

$$L\left(c_1y_1+c_2y_2\right)=c_1Ly_1+c_2Ly_2$$

כלומר הוא אופרטור ליניארי, ולכן אם y_1, y_2 פתרונות של $Ly = 0$ מיד נובע

$$L\left(c_1y_1 + c_2y_2\right) = 0$$

כלומר גם הקומבינציה הליניארית היא פתרון.
מעבר לכך, אם יש לנו שני פתרונות y_1, y_2 למשוואה והם בלתי תלויים ליניארית, אז כל פתרון יהיה מהצורה

$$c_1y_1 + c_2y_2$$

ותהיה בחירה של c_1, c_2 שפותרת את הבעיה עם תנאי התחלה נתונים. כדי להבין את זה עד הסוף, צריך להבין מה זו תלות ליניארית.

9.5 פתרונות בלתי-תלויים - וורונסקיאן

תלות ליניארית היא נושא לקורס באלגברה ליניארית. במקרה שלנו אנו נסתפק בלהבין ששני פתרונות הם תלויים ליניארית אם

$$y_1(t) = \alpha y_2(t)$$

כאשר α קבוע. במקרה כזה

$$\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \alpha$$

כלומר

$$\frac{\dot{y}_1y_2 - y_1\dot{y}_2}{y_2^2} = 0$$

כלומר

$$\dot{y}_1y_2 - y_1\dot{y}_2 = 0$$

הדיטרמיננט הזה נקרא הוורונסקיאן

$$W = \begin{vmatrix} \dot{y}_1 & \dot{y}_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

פונקציות נחשבות תלויות זו בזו אם ורק אם $W \equiv 0$ בכל התחום. אם $W = 0$ בנקודה מסויימת t אין בזה כדי להראות שהפונקציות תלויות.
אם W אינו מתאפס זהותית, הפונקציות הן בלתי תלויות ליניארית. שני פתר-ונות בלתי תלויים נקראים גם פתרונות בסיסיים, והם למעשה מהווים בסיס למרחב הפתרונות של המשוואה.

9.6 משוואה אופיינית

נחזור עכשיו למשוואה הכללית יותר

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = 0$$

ננסה למצוא גם כאן פתרונות אקספוננציאליים על ידי הניחוש $y = e^{rt}$

$$\dot{y} = re^{rt}, \ddot{y} = r^2 e^{rt}$$

וקיבלנו

$$\left(ar^2 + br + c\right) e^{rt} = 0$$

כלומר

$$ar^2 + br + c = 0$$

משוואה זו נקראת המשוואה האופיינית של המשוואה הדיפרנציאלית.

9.6.1 בעיות עם שורשים ממשיים שונים

1. המשוואה

$$\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = 0$$

עם תנאי התחלה $y(2) = 2, \dot{y}(0) = 3$. המשוואה הדיפרנציאלית מובילה למשוואה אופיינית

$$r^2 + 5r + 6 = 0$$

הפתרונות שלה הם $r = -2, -3$ ולכן הפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

הנגזרת היא

$$\dot{y} = -2c_1 e^{-2t} - 3c_2 e^{-3t}$$

נציב תנאי התחלה

$$y(0) = c_1 + c_2 = 2$$
$$\dot{y}(0) = -2c_1 - 3c_2 = 0$$

הפתרון הוא $c_1 = 9, c_2 = -7$

$$y = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$

2. הבעיה

$$4\ddot{y} - 8\dot{y} + 3y = 0, \qquad y(0) = 2, \dot{y}(0) = \frac{1}{2}$$

מקבלים משוואה אופיינית

$$4r^2 - 8r + 3 = 0$$
$$r = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$$

ולכן הפתרון שוב

$$y = Ae^{\frac{3}{2}t} + Be^{\frac{t}{2}}$$

הנגזרת

$$\dot{y} = \frac{3}{2}Ae^{\frac{3}{2}t} + \frac{1}{2}Be^{t/2}$$

תנאי התחלה

$$y(0) = A + B = 2$$
$$\dot{y}(0) = \frac{3}{2}A + \frac{1}{2}B = \frac{1}{2}$$

הפתרון הוא $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{5}{2}$ וקיבלנו

$$y = -\frac{1}{2}e^{\frac{3t}{2}} + \frac{5}{2}e^{t/2}$$

9.6.2 בעיות עם שורשים מרוכבים

מקרה אחר הוא ששורשי המשוואה האופיינית

$$ar^2 + br + c = 0$$

הם מרוכבים, ולפיכך צמודים אחד לשני. במקרה כזה

$$r_1 = \lambda + i\omega, r_2 = \lambda - i\omega$$

כאשר $\lambda, \omega \in \mathbb{R}$ והפתרונות הם

$$e^{\lambda t \pm i\omega t} = e^{\lambda t}\left\{\cos\omega t \pm i\sin\omega t\right\}$$

הפתרון הכללי שלנו הוא לפיכך

$$e^{\lambda t}\left\{c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}\right\}$$

אלה באופן כללי פתרונות עם ערכים מרוכבים. לעיתים פונקציות מרוכבות זה טוב, אבל נכון לעכשיו אנו נרצה להגביל את עצמנו לפתרונות ממשיים. נשים לב שאם המשוואה הליניארית שלנו היא

$$Ly = 0$$

כאשר L עצמי לא מכיל שום דבר שאינו ממשי, ו-y מרוכבת

$$y = u + iv$$

כאשר u, v פונקציות ממשיות, אזי

$$Lu + iLv = 0$$

ולכן בפרט

$$Lu = 0, Lv = 0$$

כי זו הדרך היחידה שהמספר המרוכב $Lu + iLv$ יכול להתאפס. יוצא מזה שאם $y(t)$ מרוכב הוא פתרון, אז החלק הממשי והחלק המדומה שלו, כל אחד מהם הוא פתרון. במקרה שלנו

$$e^{\lambda t}\cos\omega t, e^{\lambda t}\sin\omega t$$

אפשר לבדוק על ידי הצבה בוורונסקיאן שהם בלתי-תלויים (כל עוד $\omega \neq 0$) - ואת זה נשאיר כתרגיל. הפתרון הכללי הממשי לפיכך הוא

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos\omega t + c_2 e^{\lambda t}\sin\omega t$$

מקרה פשוט במיוחד הוא

$$\begin{aligned} y'' + \omega^2 y &= 0 \\ r^2 + \omega^2 &= 0 \\ r &= \pm i\omega \end{aligned}$$

כלומר

$$y = c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t$$

בפיזיקה זה כמובן מייצג אוסצילטור הרמוני פשוט.

דוגמא

הבעיה

$$16\ddot{y} - 8\dot{y} + 145y = 0, \qquad y(0) = -2, \dot{y}(0) = 1$$

המשוואה האופיינית היא

$$16r^2 - 8r + 145 = 0$$

שפתרונותיה הם

$$\begin{aligned} r &= \frac{8 \pm \sqrt{64 - 4\cdot 16\cdot 145}}{32} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{-9216}}{32} \\ &= \frac{8 \pm i96}{32} \\ &= \frac{1}{4} \pm 3i \end{aligned}$$

כלומר

$$y = e^{t/4}[A\cos 3t + B\sin 3t]$$

הנגזרת היא

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{e^{t/4}}{4}\left[A\cos 3t + B\sin 3t\right] + e^{t/4}3\left[B\cos 3t - A\sin 3t\right]\\ &= e^{t/3}\left\{\left(\frac{A}{4}+3B\right)\cos 3t + \left(\frac{B}{4}-3A\right)\sin 3t\right\}\end{aligned}$$

תנאי התחלה:

$$\begin{aligned}y(0) &= A = -2\\ y(\dot{0}) &= \frac{A}{4} + 3B = 1\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}A + 12B &= 4\\ 12B &= 4 - A = 4 + 2 = 6\\ B &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ומכאן

$$y = e^{t/4}\left\{-2\cos 3t + \frac{1}{2}\sin 3t\right\}$$

נפתור עכשיו בדרך אחרת, עם האקספוננטים המרוכבים ישירות

$$\begin{aligned}y &= \alpha e^{\left(\frac{1}{4}+3i\right)t} + \beta e^{\left(\frac{1}{4}-3i\right)t}\\ \dot{y} &= \alpha\left(\frac{1}{4}+3i\right)e^{\left(\frac{1}{4}+3i\right)t} + \beta\left(\frac{1}{4}-3i\right)e^{\left(\frac{1}{4}-3i\right)t}\end{aligned}$$

עכשיו

$$\begin{aligned}y(0) &= \alpha + \beta = -2\\ \dot{y}(0) &= \alpha\left(\frac{1}{4}+3i\right) + \beta\left(\frac{1}{4}-3i\right) = 1\end{aligned}$$

נציב את הראשונה בשנייה

$$\begin{aligned}
\alpha\left(\frac{1}{4}+3i\right)+(-2-\alpha)\left(\frac{1}{4}-3i\right)&=1\\
\alpha\left[\frac{1}{4}+3i-\left(\frac{1}{4}-3i\right)\right]-2\left(\frac{1}{4}-3i\right)&=1\\
6i\alpha&=1+2\left(\frac{1}{4}-3i\right)\\
&=\frac{3}{2}-6i\\
\alpha&=\frac{3}{2\cdot 6i}-1=\frac{1}{4i}-1\\
&=-1-\frac{i}{4}=-\left(1+\frac{i}{4}\right)\\
\beta&=-2-\alpha=-2+1+\frac{i}{4}\\
&=-1+\frac{i}{4}
\end{aligned}$$

הפתרון לפכך

$$\begin{aligned}
y&=-\left(1+\frac{i}{4}\right)e^{\left(\frac{1}{4}+3i\right)t}+\left(-1+\frac{i}{4}\right)e^{\left(\frac{1}{4}-3i\right)t}\\
&=e^{t/4}\left\{-\left(1+\frac{i}{4}\right)e^{3it}+\left(-1+\frac{i}{4}\right)e^{-3it}\right\}\\
&=e^{t/4}\left\{-e^{3it}-e^{-3it}-\frac{i}{4}\left(e^{3it}-e^{-3it}\right)\right\}\\
&=e^{t/4}\left\{-2\cos 3t-\frac{i}{4}2i\sin 3t\right\}\\
&=e^{t/4}\left\{-2\cos 3t+\frac{1}{2}\sin 3t\right\}
\end{aligned}$$

וקיבלנו את אותו פתרון. הסיבה היא שתנאי ההתחלה הם ממשיים, וזה מאלץ את המקדמים המרוכבים α,β להסתדר כך שהפתרון $y(t)$ יהיה ממשי.

9.7 שורשים שחוזרים על עצמם

מה עושים במקרה שיש שורש ממשי אחד למשוואה האופיינית? במקרה כזה יש לנו

$$b^2-4ac=0$$

ואז

$$r=-\frac{b}{2a}$$

והפתרון הוא e^{rt}, כאשר r הוא השורש של המשוואה האופיינית. הצרה היא שאנו צריכים עוד פתרון, משום שהמשוואה מסדר שני ויש לה שני פתרונות בלתי-תלויים. דאלאמבר ניחש שכדאי לנסות

$$y = v(t)e^{rt}$$

מכאן

$$\dot{y} = e^{rt}\left(\dot{v} + rv\right)$$

וגם

$$\ddot{y} = e^{rt}\left(\ddot{v} + 2r\dot{v} + r^2 v\right)$$

נציב במשוואה ונקבל

$$\begin{aligned} a\ddot{y} + b\dot{y} + cy &= 0 \\ a\left(\ddot{v} + 2r\dot{v} + r^2 v\right) + b\left(\dot{v} + rv\right) + cv &= 0 \\ (a+b)\,\ddot{v} + (2ar+b)\,\dot{v} + \left(ar^2 + br + c\right)v &= 0 \end{aligned}$$

המקדמים של שני המחוברים האחרונים מתאפסים, כי $r = -b/2a$ הוא הפתרון של המשוואה האופיינית, כלומר

$$\ddot{v} = 0$$

זו משוואה טריביאלית ופתרונה

$$v = At + B$$

הפתרון החדש שלנו לפיכך יהיה $y = te^{rt}$ והפתרון הכללי הוא

$$y = \alpha e^{rt} + \beta t e^{rt}$$

לדוגמא, נפתור את

$$y - \dot{y} + \frac{1}{4}y = 0, \qquad y(0) = 2, \dot{y}(0) = \frac{1}{3}$$

המשוואה האופיינית היא

$$\begin{aligned} r^2 - r + \frac{1}{4} &= 0 \\ r &= \frac{1 \pm \sqrt{1-1}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

לכן הפתרונות שלנו יהיו

$$\begin{aligned} y &= e^{t/2}\left(\alpha + \beta t\right) \\ \dot{y} &= \frac{1}{2}e^{t/2}\left(\alpha + \beta t\right) + e^{t/2}\beta \\ &= e^{t/2}\left[\frac{\alpha}{2} + \beta\left(\frac{t}{2} + 1\right)\right] \end{aligned}$$

תנאי התחלה

$$\begin{aligned}\alpha &= 2\\ \frac{\alpha}{2}+\beta &= \frac{1}{3}\\ \beta &= \frac{1}{3}-\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}-1\\ &= -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}y &= e^{t/2}\left[1-\frac{2}{3}\left(\frac{t}{2}+1\right)\right]\\ &= \frac{e^{t/2}}{3}(1-t)\end{aligned}$$

9.8 הורדת סדר של משוואה

יש הכללה של הטכניקה של דאלאמבר, למקרה שבו פתרון אחד של המשוואה ידוע, שעוזרת לנחש את הפתרון השני. נניח שיש לנו פתרון $y=f(t)$ (שאינו פתרון האפס) למשוואה

$$\ddot{y}+p(t)\dot{y}+q(t)y=0$$

ננסה להציב

$$y=f(t)v(t)$$

אז

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \dot{f}v+f\dot{v}\\ \ddot{y} &= \ddot{f}v+2\dot{f}\dot{v}+f\ddot{v}\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}\ddot{f}v+2\dot{f}\dot{v}+f\ddot{v}+p(t)\left(\dot{f}v+f\dot{v}\right)+q(t)fv &= 0\\ f\ddot{v}+\left(2\dot{f}+pf\right)\dot{v}+\left(\ddot{f}+p\dot{f}+qf\right)v &= 0\end{aligned}$$

המחובר האחרון נעלם, כי f היא פתרון של המשוואה ונותרנו עם

$$f\ddot{v}+\left(2\dot{f}+pf\right)\dot{v}=0$$

עכשיו נגדיר את $u=\dot{v}$ וקיבלנו

$$f(t)\frac{du}{dt}+\left(2\dot{f}+p(t)f(t)\right)u=0$$

זו משוואה ליניארית מסדר ראשון, ואותה אפשר לפתור בשיטות שכבר למדנו.
לדוגמא, נניח שיש לנו את המשוואה

$$2t^2\ddot{y}+3t\dot{y}-y=0, t>0$$

נחלק ב-$2t^2$ ונקבל צורה קנונית למשוואה

$$\ddot{y}+\frac{3}{2t}\dot{y}-y=0$$

וידוע לנו ש-t^{-1} פותר אותה. ננסה להשיג פתרון שני ע"י ההצבה

$$y=t^{-1}v(t)$$

זה מוביל אותנו למשוואה

$$\begin{aligned}
t^{-1}\frac{du}{dt}+\left(-2t^{-2}+\frac{3}{2t}\cdot t^{-1}\right)u=0\\
\frac{du}{dt}+\left(\frac{3}{2t}-\frac{2}{t}\right)u=0\\
\frac{du}{dt}=\frac{1}{2t}u\\
\frac{du}{u}=\frac{dt}{2t}\\
\ln u=\frac{1}{2}\ln t\\
u=t^{1/2}
\end{aligned}$$

כלומר

$$\dot{v}=t^{1/2}\Rightarrow v\sim t^{3/2}$$

ולכן

$$y=t^{3/2}t^{-1}=t^{1/2}$$

היא הפתרון השני שלנו, והפתרון הכללי יהיה

$$y=\alpha t^{1/2}+\beta t^{-1}$$

כאשר לאורך הדרך אנו "בולעים" קבועים כפליים לתוך הקבועים הכפליים הסופיים α, β.

9.9 משוואות לא הומוגניות

נחזור עכשיו למשוואה

$$Ly=\left(\frac{d^2}{dt^2}+p(t)\frac{d}{dt}+q(t)\right)y=g(t)$$

כלומר החלק $g(t)$ אינו אפס. זו משוואה לא הומוגנית. נשים לב שאם יש לנו שני פתרונות של המשוואה

$$Ly = g(t)$$

אז ההפרש שלהם פותר את המשוואה ההומוגנית המתאימה. יהי Y_1, Y_2 פתרונות, אז

$$L\left(Y_1 - Y_2\right) = LY_1 - LY_2 = g(t) - g(t) = 0$$

לפיכך $Y_1 - Y_2$ הוא פתרון של המשוואה ההומוגנית, ולכן נפרש ע"י סט הפתרונות שלה

$$Y_1 - Y_2 = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

כאשר y_1, y_2 הם שני פתרונות בלתי תלויים של $Ly = 0$. אפשר לנסח זאת טיפה אחרת: יהי $\phi(t)$ פתרון שרירותי של $Ly = g$ ויהי $Y(t)$ פתרון כלשהו של $Ly = g$ אזי

$$\phi(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) + Y(t)$$

וזו למעשה הנוסחא לפתרון הכללי ביותר של המשוואה האי הומוגנית.
לפיכך פתרון המשוואה $Ly = g$ מורכב משני חלקים: מציאת פתרון לחלק ההומוגני, שאת זה כבר עשינו, ומציאת פתרון כלשהו למשוואה האי-הומוגנית - שנקרא פתרון "פרטי" או "פרטיקולרי" או "מסויים", ובזה נתון עכשיו.

9.9.1 שיטת המקדמים הלא ידועים undetermined coefficients

בשיטה זו אנו מנחשים צורה כללית של פתרון, עם מקדמים, מציבים ומנסים לגלות מקדמים שיתאימו. הכי טוב לעשות דוגמא,

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = 3e^{2t}$$

הניחוש שלנו יהיה

$$Y = Ae^{2t}$$

ואז התוצאה היא

$$\begin{aligned} \left(2^2 - 3 \cdot 2 - 4\right) Ae^{2t} &= 3e^{2t} \\ -6A &= 3 \\ A &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

כלומר

$$Y = -\frac{1}{2}e^{2t}$$

במקרה הזה A היה ה"מקדם" שבירנו.
דוגמא אחרת

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = 2\sin t$$

אפשר לנסות $y = A\sin t$ אבל זה לא יצליח

$$\begin{aligned}-A\sin t - 3A\cos t - 4A\sin t &= 2\sin t\\ -5A\sin t - 3A\cos t &= 2\sin t\end{aligned}$$

ה-$\cos t$ מפריע לנו. כדאי לפיכך לנסות

$$y = A\sin t + B\cos t$$

ולקבל

$$\begin{aligned}-A\sin t - B\cos t - 3\left(A\cos t - B\sin t\right) - 4\left(A\sin t + B\cos t\right) &= 2\sin t\\ \left(3B-5A\right)\sin t - \left(5B+3A\right)\cos t &= 2\sin t\end{aligned}$$

מכאן

$$\begin{aligned}3B - 5A &= 2\\ 5B + 3A &= 0\end{aligned}$$

נפתור

$$\begin{aligned}15B - 25A &= 10\\ 15B + 9A &= 0\\ 34A &= -10\\ A &= -\frac{10}{34} = -\frac{5}{17}\\ B &= -\frac{3A}{5} = \frac{3\cdot 5}{5\cdot 17}\\ &= \frac{3}{17}\end{aligned}$$

כלומר

$$Y = -\frac{5}{17}\sin t + \frac{3}{17}\cos t$$

מה נעשה עם כזה דבר?

$$\ddot{y} - 3\dot{y} - 4y = 2\sin t + 3e^{2t}$$

בעצם יש לנו כאן

$$Ly = g_1(t) + g_2(t)$$

האופרטור ליניארי ולכן אם יש לנו את $LY_1 = g_1(t), LY_2 = g_2(t)$ אז

$$L\left(Y_1 + Y_2\right) = LY_1 + LY_2 = g_1(t) + g_2(t)$$

כלומר Y_1+Y_2 הוא הפתרון הפרטי שחיפשנו, במקרה הזה

$$Y=-\frac{5}{17}\sin t+\frac{3}{17}\cos t-\frac{1}{2}e^{2t}$$

בעיה נוספת שקורית לעיתים היא זו

$$\ddot{y}+4y=3\cos 2t$$

האיבר האי-הומוגני כאן הוא בעצמו פתרון של המשוואה ההומוגנית, ולכן ההצבה $Y=\{\sin 2t,\cos 2t\}$ לא תצליח. צריך לחפש משהו אחר, שעדיין יש בו טריגונומטיה, אבל מספיק פשוט כדי שיהיה סיכוי שיצליח. מסתבר שהניחוש הנכון הוא

$$\begin{aligned}Y&=t\left(A\cos 2t+B\sin 2t\right)\\ \ddot{Y}&=2\frac{dt}{dt}\frac{d}{dt}\left(A\cos 2t+B\sin 2t\right)-t2^2\left(A\cos 2t+B\sin 2t\right)\\ &=4\left(B\cos 2t-A\sin 2t\right)-4Y\end{aligned}$$

כלומר

$$\ddot{Y}+4Y=4B\cos 2t-4A\sin 2t$$

נציב ונקבל

$$4B\cos 2t-4A\sin 2t=3\cos 2t$$

כלומר $A=0,B=3/4$ וקיבלנו

$$Y=\frac{3}{4}t\sin 2t$$

פיזיקלית, יש כאן רזוננס ללא איבר מרסן, ולכן האמפליטודה גדלה ללא גבול.

9.9.2 וריאציה על פרמטרים

יש שיטה נוספת, כללית יותר, אבל לעיתים קשה יותר לביצוע, לפתרון משוואות לינ-יאריות מסדר שני מהצורה

$$\ddot{y}+p(t)\dot{y}+q(t)y=g(t)$$

. אנו נניח שוב שיש לנו את y_1,y_2, הפתרונות של המשוואה ההומוגנית, ואנו מחפשים פתרון פרטי. ננסה

$$y=u_1(t)y_1(t)+u_2(t)y_2(t)$$

כלומר מעין קומבינציה ליניארית, אבל עם מקדמים שהם פונקציות. אנו מקבלים

$$\begin{aligned}\dot{y}&=\dot{u}_1y_1+u_1\dot{y}_1+\dot{u}_2y_2+u_2\dot{y}_2\\ &=u_1\dot{y}_1+u_2\dot{y}_2+\dot{u}_1y_1+\dot{u}_2y_2\end{aligned}$$

עכשיו אנו שמים לב שיש לנו שתי פונקציות u_1, u_2 ומשוואה אחת בסופו של דבר, לכן ניתן לדרוש עליהן תנאי:

$$y_1\dot{u}_1 + y_2\dot{u}_2 = 0$$

ואז

$$\dot{y} = u_1\dot{y}_1 + u_2\dot{y}_2$$

נמשיך

$$\ddot{y} = \dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2 + u_1\ddot{y}_1 + u_2\ddot{y}_2$$

לכן

$$\begin{aligned} Ly &= \ddot{y} + p\dot{y} + q \\ &= \dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2 + u_1\ddot{y}_1 + u_2\ddot{y}_2 \\ &\quad + p\left(u_1\dot{y}_1 + u_2\dot{y}_2\right) + q\left(u_1y_1 + u_2y_2\right) \\ &= u_1\left(\ddot{y}_1 + p\dot{y}_1 + qy_1\right) + u_2\left(\ddot{y}_2 + p\dot{y}_2 + qy_2\right) \\ &\quad + \dot{u}_1\dot{y}_1 + \dot{u}_2\dot{y}_2 \end{aligned}$$

שני המחוברים הראשונים נעלמים, כי $Ly_1 = Ly_2 = 0$ ונותרנו עם

$$Ly = \dot{y}_1\dot{u}_1 + \dot{y}_2\dot{u}_2 = g(t)$$

ביחד עם התנאי הקודם

$$y_1\dot{u}_1 + y_2\dot{u}_2 = 0$$

זו מערכת משוואות ליניארית שאפשר לפתור עבור ה-$\dot{u}$. הפתרון הוא

$$\dot{u}_1 = -\frac{y_2(t)g(t)}{W(y_1, y_2)}, \quad \dot{u}_2 = \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)}$$

כאשר $W = y_1\dot{y}_2 - y_2\dot{y}_1$ הוא הוורונסקיאן. מכאן שהפתרון הפרטי שלנו הוא

$$Y = -y_1(t)\int \frac{y_2(t)g(t)}{W\left(y_1, y_2\right)}dt + y_2(t)\int \frac{y_1(t)g(t)}{W(y_1, y_2)}dt$$

את זה צריך להוסיף לפתרון ההומוגני כדי לקבל פתרון כללי.

דוגמא:

$$\ddot{y} + 4y = \frac{3}{\sin t}$$

הפתרונות ההומוגניים ידועים לנו $y_1 = \cos 2t, y_2 = \sin 2t$. הוורנסקיאן שלהם הוא

$$\begin{aligned} W &= y_1\dot{y}_2 - y_2\dot{y}_1 \\ &= 2\cos^2 2t + 2\sin^2 2t \\ &= 2 \end{aligned}$$

לפיכך

$$\begin{aligned} u_1 &= -\int \frac{\sin 2t}{2}\frac{3}{\sin t}dt \\ &= -\frac{3}{2}\int \frac{2\sin t\cos t}{\sin t}dt \\ &= -3\int \cos t dt \\ &= -3\sin t \end{aligned}$$

וגם

$$\begin{aligned} u_2 &= \int \frac{\cos 2t}{2}\cdot\frac{3}{\sin t}dt \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{\cos 2t}{\sin t}dt \\ &= \frac{3}{2}\int \frac{1-2\sin^2 t}{\sin t}dt \\ &= \frac{3}{2}\left\{\int \frac{dt}{\sin t} - 2\int \sin t dt\right\} \\ &= \frac{3}{2}\left\{-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos t}{1-\cos t}\right| + 2\cos t\right\} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + 3\cos t \end{aligned}$$

הפתרון הפרטי הוא לפיכך

$$Y = -3\sin t\cos 2t + \left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right| + 3\cos t\right)\sin 2t$$

9.10 פתרון של אוסצילטור הרמוני עם מספרים מרוכבים

הבעיה שלנו היא כזו

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = H\cos\omega t$$

הדרך הקלה לפתור את זה היא להשתמש ב-$\cos\omega t = \Re e^{-i\omega t}$.

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = He^{-i\omega t}$$

ננחש עכשיו

$$x = Ae^{-i\omega t}$$

ונקבל

$$
\begin{aligned}
-\omega^2 A e^{-i\omega t} - i\omega\beta A e^{-i\omega t} + \omega_0^2 A e^{-i\omega t} &= H e^{-i\omega t} \\
\left(\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega\right) A &= H \\
A &= \frac{H}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega}
\end{aligned}
$$

כלומר הפתרון שלנו הוא

$$
x = \frac{H e^{-i\omega t}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega}
$$

הפתרון הפיזיקלי הוא החלק הממשי כאן (כי הכח המאלץ הוא החלק הממשי של האיבר הלא הומוגני). כדי לחקור זאת נסמן

$$
\begin{aligned}
z &= \omega_0^2 - \omega^2 - i\beta\omega \\
|z|^2 &= \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \beta^2\omega^2 \\
z &= |z| e^{i\varphi} \\
\tan\varphi &= -\frac{\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}
\end{aligned}
$$

כלומר

$$
x = \frac{H e^{-i\omega t}}{|z| e^{i\varphi}} = \frac{H}{|z|} e^{-i(\omega t + \varphi)}
$$

בהנחה ש-$H \in \mathbb{R}$ אנו מקבלים

$$
\begin{aligned}
x = \Re x &= \frac{H}{|z|} \cos\left(\omega t + \varphi\right) \\
&= \frac{H}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t + \varphi\right)
\end{aligned}
$$

כאשר φ נתונה בנוסחא הקודמת. זו הסיבה שמספרים מהסוג $e^{-i\varphi}$ נקראים "פקטורי פאזה". למעשה הפתרון שקיבלנו הוא מהצורה $A\cos\omega t + B\sin\omega t$, המספרים המר-וכבים הובילו אותנו ישר לפאזה הנכונה.

כמו כן, חשוב להבין שהפתרון הזה הוא הפתרון הפרטי ולא הפתרון הכללי של משוואת התנועה. מהידע שלנו על הפתרונות ההומוגניים, אנו יודעים שהם בכל מקרה ידעכו לאפס בסופו של דבר, כלומר מה שקיבלנו כאן זו ההתנהגות של האוסצילטור בטווח הארוך.

פרק 10

תרגילים ופתרונות

1. מתוך תשעה מועד א, שאלה 1: נניח ש-$\alpha > 0$ ו-$r \in \mathbb{R}$. רק אחד מהאינטגרלים מתכנס:

$$\int_{-\infty}^{0} dx\, e^{-\alpha x} \cos rx, \int_{0}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x} \cos rx$$

חשבו את ערכו של האינטגרל המתכנס מבין השניים.

פתרון: מאחר ש-$\alpha > 0$ האינטגרנד גדל ללא גבול ב-$x \to -\infty$, לכן כנראה שהוא לא זה שמתכנס. דרך אחרת לראות זאת

$$\left| \int_{0}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x} \cos rx \right| \leq \int_{0}^{\infty} dx\, \left| e^{-\alpha x} \cos rx \right| < \int_{0}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x}$$

והאינטגרל מימין מתכנס, כפי שקל לברר. טוב, אז נחשב אותו:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x} \cos rx &= -\frac{1}{\alpha} \int d\left(e^{-\alpha x}\right) \cos rx \\
&= -\frac{1}{\alpha}\, e^{-\alpha x} \cos rx \Big|_{0}^{\infty} - \frac{r}{\alpha} \int dx\, e^{-\alpha x} \sin rx \\
&= \frac{1}{\alpha} + \frac{r}{\alpha^2} \int d\left(e^{-\alpha x}\right) \sin rx \\
&= \frac{1}{\alpha} + \frac{r}{\alpha^2} \left\{ e^{-\alpha x} \sin x \Big|_{0}^{\infty} - r \int_{0}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x} \cos rx \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha} - \frac{r^2}{\alpha^2} \int_{0}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x} \cos rx \\
\left(1 + \frac{r^2}{\alpha^2}\right) \int_{0}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x} \cos rx &= \frac{1}{\alpha} \\
\int_{0}^{\infty} dx\, e^{-\alpha x} \cos rx &= \frac{\alpha}{\alpha^2 + r^2}
\end{aligned}$$

דרך אחרת

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x}\left(e^{irx}+e^{-irx}\right) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty dx\left[e^{-(\alpha-ir)x}+e^{-(\alpha+ir)x}\right]\\ &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{e^{-(\alpha-ir)x}|_0^\infty}{\alpha-ir}+\frac{e^{-(\alpha+ir)x}|_0^\infty}{\alpha+ir}\right\}\\ &= -\frac{1}{2}\left\{\frac{-1}{\alpha-ir}-\frac{1}{\alpha+ir}\right\}\\ &= \frac{1}{2}\frac{\alpha+ir+\alpha-ir}{\alpha^2+r^2}=\frac{\alpha}{\alpha^2+r^2}\end{aligned}$$

2. מתוך תשעה מועד א, שאלה 2: חשבו את הגבול

$$\begin{aligned}\lim_{x,y\to 0}\frac{\sin 2xy}{1-e^{xy}} &= \lim_{u\to 0}\frac{\sin 2u}{1-e^u}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{2\cos 2u}{-e^u}\\ &= -2\lim_{u\to 0}\frac{\cos 2u}{e^u}\\ &= -2\end{aligned}$$

הסיבה שלא צריך לחשוב יותר מדי על הגבול הדו ממדי היא, ש

$$\lim_{x,y\to 0} xy = 0$$

כלומר אנו יודעים שלא חשוב באיזה אופן בדיוק x, y מתקרבים לאפס, הקו-מבינציה xy מתקרבת לאפס.

3. מתוך תשעה מועד א, שאלה 3: מבצעים טרנספורמציה ממערכת קרטזית x, y, z למערכת חדשה u, v, w

$$\begin{aligned}x &= u-v+w\\ y &= u^2-v^2-w^2\\ z &= u^3+v\end{aligned}$$

מצאו את הנפח של האזור

$$0\le u\le 1, 0\le v\le 1, 0\le w\le 1$$

פתרון: אנו רוצים את

$$\int_R dxdydz = \int\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

היעקוביאן הוא

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} &= \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2u & -2v & -2w \\ 3u^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 3u^2 & 1 & 0 \\ 2u & -2v & -2w \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\left[3u^2(-2v-2w) - 1(2u+2w)\right] \\ &= 6u^2(v+w) + 2(u+w)\end{aligned}$$

לכן

$$\int dxdydz = \int dudvdw\left[6u^2(v+w) + 2(u+w)\right]$$

כל הגבולות הם בלתי תלויים ולכן אין יותר מה לחשוב. מחובר ראשון

$$\begin{aligned}\int du\, 6u^2 \int dvdw\,(v+w) &= 2u^3|_0^1 \left(2\int dvdw\, v\right) \\ &= 4\cdot w|_0^1 \cdot \left.\frac{v^2}{2}\right|_0^1 \\ &= 4\cdot\frac{1}{2} = 2\end{aligned}$$

מחובר שני

$$\begin{aligned}2\int dudvdw\, u &= \int du\, 2u \int dv \int dw \\ &= u^2|_0^1 v|_0^1 w|_0^1 = 1\end{aligned}$$

ובאופן דומה המחובר השלישי. לכן

$$\int dxdydz = 2+1+1 = 4$$

4. מתוך תשעה מועד א, שאלה 4: גליל ברדיוס $R=1$ וגובה $2h$ מונח כך שצירו על ציר z ומרכזו בראשית הצירים. צפיפות המסה של הגליל בכל נקודה היא אחד-חלקי-מרחק-הנקודה מראשית הצירים. מה מסתו? רמז: באינטגרל כדאי להשתמש בפונקציות היפרבוליות.

פתרון:

$$\begin{aligned}
\rho &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \\
m &= \int \rho dV \\
&= \int \frac{rdrd\varphi dz}{\sqrt{r^2+z^2}} \\
&= 2\pi \int dz \int \frac{rdr}{\sqrt{r^2+z^2}} \\
&= \pi \int dz \int \frac{d\left(r^2\right)}{\left(r^2+z^2\right)^{1/2}} \\
&= \pi \int dz \cdot 2\left(r^2+z^2\right)^{1/2}|_0^{R=1} \\
&= 2\pi \int dz \left(\sqrt{1+z^2} - |z|\right)
\end{aligned}$$

השני

$$\int_{-h}^{h} dz|z| = 2\int_0^h dz\, z = z^2|_0^h = h^2$$

הראשון

$$\int dz\sqrt{1+z^2}, \quad z = \sinh u$$

$$\begin{aligned}
\int \cosh u du\, \sqrt{1+\sinh^2 u} &= \int du\ \cosh u \cdot \cosh u \\
&= \int du \cosh^2 u
\end{aligned}$$

יש זהות

$$\begin{aligned}
\cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x \\
&= 2\cosh^2 x - 1 \\
\cosh^2 x &= \frac{1}{2}\left[1+\cosh 2x\right]
\end{aligned}$$

כלומר

$$\int_{-h}^{h} dz\sqrt{1+z^2} = \frac{1}{2}\int du\left[1+\cosh 2u\right] = \frac{1}{2}\left[u + \frac{1}{2}\sinh 2u\right]$$

עכשיו יש שאלה של גבולות. $\pm h = \sinh u$ ולכן

$$-\sinh^{-1} h \le u \le \sinh^{-1} h$$

לכן

$$\sinh 2u = 2\cosh u \sinh u$$
$$\sinh 2u|^{\pm h} = \pm 2h\sqrt{1+h^2}$$

כלומר

$$\int_{-h}^{h} dz\sqrt{1+z^2} = \frac{1}{2}\left[2\sinh^{-1} h + \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2h\sqrt{1+h^2}\right]$$
$$= \sinh^{-1} h + h\sqrt{1+h^2}$$

ולכן התוצאה היא

$$m = 2\pi\int dz\cdots = 2\pi\left[\sinh^{-1} h + h\sqrt{1+h^2} - h^2\right]$$

5. מתוך תשעה מועד א, שאלה 5: בקואורדינטות כדוריות, מצאו את הנפח המשותף לשני הכדורים $r = a$ ו-$r = 2a\cos\theta$, כלומר הנפח שנמצא בתוך שניהם.

פתרון: הכדור השני ממורכז בנקודה $z = a$, כלומר מרכז הכדור הראשון (ראשית הצירים) הוא הנקודה התחתונה ביותר של הכדור השני. אפשר לראות זאת כך

$$r = 2a\cos\theta$$
$$r^2 = 2ar\cos\theta = 2az$$
$$\rho^2 + z^2 = 2az$$
$$\rho^2 + z^2 - 2az = 0$$
$$\rho^2 + (z-a)^2 = a^2$$

כאשר $\rho^2 = x^2 + y^2$. הכדורים ממוקמים בצורה סימטרית לגמרי, ולכן הנפח הכלוא ביניהם הוא פשוט פעמיים הנפח של הכיפה כדורית שנוצר ע"י חיתוך הכדור התחתון עם המישור $z = a/2$. לכן נחשב את זה במקום. החישוב עצמו לא כזה מעניין וגם יש לזה נוסחאות. העיקר הפישוט של הבעיה.

6. מועד ב התשעה, שאלה 1: מצאו וציירו במישור המרוכב את

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{1/3}$$

פתרון: נתחיל עם

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1+1} = \frac{1+2i-1}{2} = i$$

כלומר מדובר בעצם ב-$i^{1/3}$. עכשיו נסמן $z = e^{i\theta}$ ונדרוש

$$e^{3i\theta} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

מכאן

$$3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

כלומר

$$\theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} = \frac{\pi + 4\pi k}{6}$$

כאשר $k = 0, 1, 2$ אחר כן זה חוזר על עצמו. קיבלנו

$$e^{i\left(\frac{\pi}{6}\right)}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, e^{i\frac{3\pi}{2}} = e^{i\pi/6}, e^{i\frac{5\pi}{6}}, -i$$

7. מועד ב התשעה, שאלה 2, חשבו את האינטגרל הלא מסויים

$$\int dx e^x \tanh x$$

פתרון: נרשום

$$\int dx\, e^x \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \int dx\, \frac{e^{2x} - 1}{e^x + e^{-x}}$$

עכשיו $u = e^x$ וקיבלנו

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{u} \frac{u^2 - 1}{u + u^{-1}} &= \int du \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1} \\
&= \int du \frac{u^2 + 1 - 2}{u^2 + 1} \\
&= \int du \left\{1 - \frac{2}{u^2 + 1}\right\} \\
&= \int du - 2\int \frac{du}{u^2 + 1} \\
&= u - 2\tan^{-1} u \\
&= e^x - 2\tan^{-1} e^x
\end{aligned}$$

8. מועד ב התשעה, שאלה 3: נתון חצי קטרואיד בקואורדינטות פולריות

$$r = 1 - \cos\varphi, 0 \le \varphi \le \pi$$

רשמו את $y(\varphi), x(\varphi)$ וחשבו את אורך הקו המתאר את חצי הקטרואיד.
פתרון:

$$\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi = (1 - \cos\varphi)\cos\varphi = \cos\varphi - \cos^2\varphi \\
y &= r\sin\varphi = (1 - \cos\varphi)\sin\varphi = \sin\varphi - \cos\varphi\sin\varphi
\end{aligned}$$

אורך הקו הוא חישוב שעדיף לעשות בפולריות,

$$\begin{aligned}
l &= \int dl = \int d\varphi \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} \\
&= \int_0^\pi d\varphi \sqrt{\left(1-\cos\varphi\right)^2 + \left(\sin\varphi\right)^2} \\
&= \int_0^\pi d\varphi \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi} \\
&= \int_0^\pi d\varphi \sqrt{2 - 2\cos\varphi} \\
&= \sqrt{2}\int_0^\pi d\varphi \sqrt{1-\cos\varphi}
\end{aligned}$$

עכשיו

$$\begin{aligned}
z &= \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \\
d\varphi &= \frac{2dz}{1+z^2} \\
\cos\varphi &= \frac{1-z^2}{1+z^2} \\
z &\in [0,\infty)
\end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned}
l &= \sqrt{2}\int_0^\infty \frac{2dz}{1+z^2}\sqrt{1-\frac{1-z^2}{1+z^2}} \\
&= 2\sqrt{2}\int \frac{dz}{1+z^2}\sqrt{\frac{1+z^2-1+z^2}{1+z^2}} \\
&= 2\sqrt{2}\int \frac{dz}{1+z^2}\frac{\sqrt{2}z}{\sqrt{1+z^2}} \\
&= 4\int \frac{zdz}{\left(1+z^2\right)^{3/2}} = 2\int \left(1+z^2\right)^{-3/2} d\left(z^2\right) \\
&= -4\left(1+z^2\right)^{-1/2}\Big|_0^\infty \\
&= -4\left[0-1\right] = 4
\end{aligned}$$