פרדוקס התאומים: מה קורה כשלתאום שנוסע יש טלסקופ

ד"ר יואב קלינברגר

21 באוגוסט 2016

תקציר

כיצד נצפית ההזדקנות המואצת של התאום שנשאר על ידי התאום שיצא למסע, אם יש לזה האחרון טלסקופ שבו הוא מביט באופן רציף באחיו שנשאר מאחור? הניתוח כאן לוקח בחשבון את הזמן שלוקח לאור להגיע מהראשון לשני, ומחשב את קצב ההזדקנות הנדמית ואת הקשר שלו להתארכות הזמן היחסותית.

כל המסמך הזה הוא ביחידות טבעיות, כלומר $c = 1$.

המאמר הזה נולד מהסבר של פרדוקס התאומים שקראתי בספר, שלא נשמע לי נכון. לפי ההסבר של אותו הספר, שלא ננקוב בשמו אבל מופיעה בו המילה "יחסות" וכתב אותו אחד ברנרד שוץ, זה שנוסע "לפתע רואה את זה שנשאר מזדקן מהר מאוד", כאשר הוא מתחיל לחזור. הטיעון שלו היה מבוסס על בו-זמניות. לפני שהנוסע הופך כיוון, הוא בו-זמני עם מאורע שקרוב מאוד לתחילת המסע, ולאחר שהוא הופך כיוון, הוא בו-זמני עם מאורע שקרוב מאוד לסוף המסע. זה לא טיעון טוב, מכיון שאי אפשר לצפות בו-זמנית בשום דבר, כידוע - מאחר שמהירות האור סופית היא. לכן, הנוסע לא "רואה" שום הזדקנות פתאומית. החלטתי לחשוב על זה קצת, ומכאן נולד זה המאמר. על מנת לעקוב אחריו, כדאי לצייר על נייר את צירי המרחב והזמן של הנשאר, ואת הקווים המתארים את תנועתו של הנוסע באותה מערכת.

אז ככה: יש שני אנשים. אחד נוסע, ואחד נשאר. אני שונא שנותנים שמות לשתי הדמויות האלה, ולכן, כאמור, נקרא להם "הנוסע" ו"הנשאר". הנוסע טס במהירות v והזמן שהוא מודד בשעונו מסומן ב-τ. הזמן של זה שנשאר מסומן ב-t. הנוסע מחכה עד שעבר זמן τ_1, ואז מייד מסתובב ומתחיל לחזור, באותה מהירות. עכשיו כולם[1] יודעים שכאשר הנוסע יחזור, בזמן $2\tau_1$, הוא ימצא שהנשאר הזדקן זמן ארוך יותר, לפי הקשר

$$t_f = \gamma(v) \cdot 2\tau_1$$

כאשר

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$$

[1] כלומר אלה שלמדו קצת ויש סיכוי שהמאמר הזה מעניין אותם

למעשה, מאחר שגודלה של המהירות לא משתנה לאורך התנועה, אלא רק כיוונה, תמיד נשמר היחס

$$\Delta t = \gamma \Delta \tau$$

(זו הסיבה שהקשר בסופו של דבר הוא הזדקנות עודפת בפקטור γ ולא נוסחא מסובכת יותר שכוללת אינטגרציה על מסלולו של הנוסע).

הסיבה העקרונית להזדקנות השונה של שני ה"תאומים" היא, שהזמן העצמי הנצבר בין שני מאורעות תלוי במסלול שהגוף עובר בו דרך המרחב-זמן. אבל הטרידה אותי השאלה המעשית יותר: איך נראה הפלא היחסותי הזה, מנקודת מבטו של הנוסע, בהנחה שהוא מסתכל כל הזמן בטלסקופ על חברו שנשאר מאחור? אפשר לדמיין שהחבר תמיד עומד שם, ואולי אפילו מחזיק לידו שעון גדול, כדי שהנוסע יוכל תמיד לראות כמה זמן חלף מנקודת מבטו של הנשאר.

נשים לב שבחלק הראשון של המסע, מיקומו של הנוסע מתואר ע"י הנשאר כך

$$x = vt$$

לאחר שהנוסע החל לחזור, מתוארת תנועתו כך

$$x = 2\gamma v \tau_1 - vt$$

כלומר

$$\begin{aligned} x &= \begin{cases} vt & \tau < \tau_1 \\ 2\gamma v \tau_1 - vt & \tau > \tau_1 \end{cases} \\ \tau &= t/\gamma \end{aligned}$$

עכשיו, נניח שאור עוזב את הנשאר בזמן t (לפי שעונו) ומגיע על הנוסע כאשר שעונו של זה מורה τ. הזמן המתאים למאורע זה, כלומר הגעתו של האור לנוסע, לפי השעון של הנשאר, הוא

$$T = \gamma \tau$$

מאחר שהאור עזב בזמן t, הרי שהאור נסע במשך פרק זמן

$$\delta t = T - t = \gamma \tau - t$$

עכשיו, בחלק הראשון של המסע, מיקומו של הנוסע בעת שהאור מגיע אליו הוא

$$x = vT = \gamma v \tau$$

מאחר שהאור נסע מ-$x = 0$ לשם, הרי $\delta x = x = \gamma v \tau$ ומכיוון שזה אור, הרי

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta t \\ \delta x = x = \gamma v \tau &= \gamma \tau - t = \delta t \\ t &= \gamma \tau - \gamma v \tau = \gamma (1 - v) \tau \end{aligned}$$

בחלק השני של המסע, מיקומו של הנוסע בשעה שהאור מגיע אליו הוא

$$\begin{aligned} x &= 2\gamma v \tau_1 - vT \\ &= 2\gamma v \tau_1 - \gamma v \tau \end{aligned}$$

ושוב $\delta x = \delta t$ וקיבלנו

$$\begin{aligned} \delta x = x = 2\gamma v \tau_1 - \gamma v \tau &= \gamma \tau - t = \delta t \\ t &= \gamma (1 + v) \tau - 2\gamma v \tau_1 \end{aligned}$$

כלומר, בסיכומו של דבר, הקשר בין הזמן t שבו עוזב האור את זה שנשאר לפי שעונו, לבין הזמן τ שבו מגיע אותו אור אל הנוסע לפי שעונו, הוא

$$t = \begin{cases} \gamma (1 - v) \tau & \tau \leq \tau_1 \\ \gamma (1 + v) \tau - 2\gamma v \tau_1 & \tau > \tau_1 \end{cases}$$

הצבה של $\tau = \tau_1$ תשכנע אתכם שהפונקציה הזו רציפה. מה שמעניין הוא היחס בין תיקתוק שעון של הנוסע, לתיקתוק שעון של הנשאר:

$$\frac{dt}{d\tau} = \begin{cases} \gamma (1 - v) & \tau < \tau_1 \\ \gamma (1 + v) & \tau > \tau_1 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-v}{1+v}} & \tau < \tau_1 \\ \sqrt{\frac{1+v}{1-v}} & \tau > \tau_1 \end{cases}$$

לאחר שהצבנו $\gamma = \left(1 - v^2\right)^{-1/2}$. לפיכך, בחלק הראשון של המסע, הנוסע הצופה באופן רציף בטלסקופ בזה שנשאר, רואה אותו מזדקן בקצב איטי יותר ממנו, מאחר ש-$(1 - v) / (1 + v) < 1$. לאחר שהוא מסתובב בחזרה, חל שינוי לא-רציף בקצב מעבר הזמן היחסי, ולפתע זה שנותר מאחור מזדקן מהר יותר ממנו, מאחר ש-

$$\frac{1 + v}{1 - v} > 1$$

האפקט הנצבר הוא

$$\begin{aligned} t_f &= \gamma (1 - v) \cdot \tau_1 + \gamma (1 + v) \cdot \tau_1 \\ &= \gamma \tau_1 [1 - v + 1 + v] \\ &= 2\gamma \tau_1 \end{aligned}$$

כלומר (זמן המסע של הנוסע הוא הרי $2\tau_1$), הפקטור הכללי הוא γ, בדיוק כפי שאמרנו בהתחלה. מי שמזהה את הנוסחאות של אפקט דופלר היחסותי, לא טועה. בניגוד לאפקט דופלר הלא-יחסותי, יש בו משהו שנשאר גם כאשר המסע מסתיים - כי חלק מהאפקט נובע מההתקרבות/התרחקות, וחלק ממנו נובע מהתארכות הזמן עצמה.

השוואה למקרה הלא יחסותי

אילו הפיזיקה היתה גליליאנית, ניתוח דומה של המצב היה נותן לנו

$$\frac{dt}{d\tau} = \begin{cases} 1-v & \tau < \tau_1 \\ 1+v & \tau > \tau_1 \end{cases}$$

והאפקט הנצבר היה נותן לנו שאין הבדל כלל, זאת אומרת

$$\begin{aligned} t &= (1-v)\,\tau_1 + (1+v)\,\tau_1 \\ &= 2\tau_1 \end{aligned}$$

קצב מעבר הזמן היה נראה שונה בשני חלקי המסע, בגלל אפקט דופלר, שנוצר מהעובדה שבתחילה הנוסע מתרחק ממקור האור, ולאחר מכן הוא מתקרב אליו בחזרה. הפיזיקה היחסותית חוזה פקטור γ נוסף, שגם נשאר לאחר שכל הסיפור מסתיים - וזה האפקט של התארכות הזמן, וניתן לצפות בו באופן רציף לכל אורך המסע.