אוסף פיזיקה

ד"ר יואב קלינברגר

6 ביוני 2014

תוכן עניינים

הקדמה

הספר הזה עוסק בפרקים בפיזיקה שנלמדת בתואר ראשון באוניברסיטה. הספר הוא פשוט ספר על פיזיקה, אבל תוך שימת דגש על כל מיני נקודות שאני, כתלמיד, הרגשתי שלא הודגשו די הצורך.

מנסיוני, זמן מה אחרי שההבנה מגיעה, כדאי תמיד לעיין מחדש בחומר. העיון הזה מאפשר העמקה מתוך פרספקטיבה של מי שרואה את "התמונה הגדולה".

אין שום אחריות שמשהו ממה שכתוב כאן נכון, אבל לאחר שזה שכב "במגרה" איזה 5-6-7 שנים, אולי הגיע הזמן שמישהו אחר גם יקרא.

יואב קלינברגר.

פרק 1

תורת היחסות הפרטית - דיון אלמנטרי

1.1 טרנספורמצית גלילי

במכניקה אנו מתארים את העולם כאוסף של חלקיקים הנמצאים בתנועה, תחת השפעתם של כוחות מסויימים. את תנועתו של חלקיק (לשם הפשטות נעסוק כאן במימד אחד) אנו מתארים ע"י פונקציה $x(t)$ המתארת את מיקומו בכל זמן וזמן.

עכשיו, נניח כי נתונים שני צופים שמסתכלים על העולם. כמו כן נתון כי צופה אחד נע ביחס לשני במהירות V. נניח כי שני הצופים משתמשים אחד במערכת קורדינטות S והשני במערכת קורדינטות S' כדי לתאר מתמטית את העולם. מאחר ששתי המערכות מתארות את אותו עולם, יש קשר ביניהן. השאלה המרכזית שתורת היחסות עוסקת בה היא: מה בדיוק הקשר הזה?

כדי לנסח זאת בצורה מתמטית, הקשר מתבטא בכך שלכל נקודה x על ציר ה-x של מערכת S מתאימה נקודה מסוימת x' במערכת S', ולהיפך. הקשר הזה נקרא "טרנספורמצית הקורדינטות". כמו כן נסמן ב-t את הזמן שמודד שעונו של הצופה S וב-t' את הזמן שמודד שעונו של הצופה S'. נניח כי בזמן $t = t' = 0$ מאפסים השניים את שעוניהם, וברגע זה ראשית הצירים של אחד מהם מתלכדת עם ראשית הצירים של השני, כבאיור 1.1 . המרחק המפריד בין שתי ראשיתות הצירים הוא

$$R = Vt$$

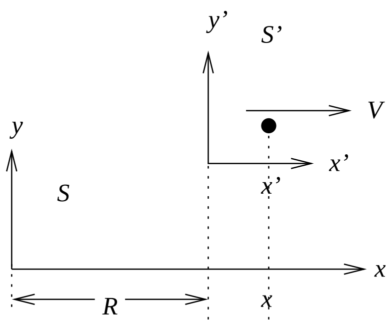
מהציור ברור כי

$$x' - x = R = Vt$$

כמו כן ברור[1] כי

$$t' = t$$

[1] בהמשך נראה כי זה לא כל כך "ברור", אך לעת עתה נניח את ההנחה האינטואיטיבית כי הזמן חולף באותה צורה עבור שני הצופים



איור 1.1: שתי מערכות יחוס.

לסיכום

$$x' = x - Vt \tag{1.1}$$

$$t' = t \tag{1.2}$$

נוסחאות אלו הן <u>טרנספורמצית הקורדינטות ממערכת S למערכת S' שנעה לעומתה במהירות V</u>. דרך אגב, אנו מתעלמים כאן מציר ה-y לשם פשטות, והוא מופיע בציור רק לשם בהירות. הטרנספורמציה הזו נקראת <u>טרנספורמצית גליליי</u>.

עכשיו אנו יכולים לדון בתנועה של חלקיק, ובאיך התנועה הזאת נראית עבור שני הצופים. למעשה, את הקשר בין מיקום החלקיק $x(t)$ ב-S ו-$x'(t')$ ב-S' כבר מצאנו - משוואות (1.1) ו-(1.2). נניח כי שני הצופים מודדים את מהירותו של החלקיק, מה הקשר בין v, מהירותו ב-S, לבין v' מהירותו ב-S'. במערכת S הוא מתואר ע"י פונקציה $x(t)$ ומהירותו

$$v = \frac{dx}{dt}$$

מטרנספורמצית גלילי נובע

$$\begin{aligned} v' &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{dx'}{dt}\frac{dt}{dt'} \\ &= \frac{d}{dt}(x - Vt) \\ &= \frac{dx}{dt} - V = v - V \end{aligned}$$

כלומר

$$v' = v - V \tag{1.3}$$

חלקיק שנע במהירות v במערכת S יראה נע במהירות v' במערכת S', הנתונה ע"י (1.3).

1.2 עיקרון היחסות

נניח כי אנו מבצעים ניסוי לבחינת החוק של ניוטון, $F = ma$ ומוצאים כי הוא נכון. למחרת אנו מבצעים את אותו הניסוי בדיוק, אבל במעבדה אחרת שנמצאת $5\,\mathrm{km}$ מערבה מהמעבדה הראשונה. אנו מאמינים כי זה לא משנה, וכי הניסוי במעבדה השנייה גם הוא יראה כי $F = ma$ הוא נכון. כלומר, חוקי הפיזיקה לא השתנו, למרות שזזנו 24 שעות קדימה בזמן, ו-$5\,\mathrm{km}$ מערבה.

מה לגבי התרחיש הבא: צופה S עושה ניסוי ומוצא כי $F = ma$. מה ימצא הצופה S'? כדי לחקור את השאלה הזו, יש לחקור כיצד כל אחד מהגדלים F, m, a משתנים במעבר ממערכת S למערכת S'. נתחיל עם התאוצה:

$$
\begin{aligned}
x' &= x - Vt \\
\frac{dx'}{dt'} \equiv \frac{dx'}{dt} &= \frac{dx}{dt} - V \\
\frac{d^2x'}{dt'^2} \equiv \frac{d^2x'}{dt^2} &= \frac{d^2x}{dt^2} \\
a' &= a
\end{aligned}
$$

ובכן, התאוצה לא משתנה בין שתי המערכות.

מה לגבי המסה? אנו נאמץ כאן את ההנחה כי <u>המסה היא תכונה של החלקיק</u>, ולכן לא יכולה להיות תלויה במערכת שבה מסתכלים עליו. לפיכך

$$m' = m$$

עכשיו נסתייע בעובדה הניסיונית, שמשקלם של גופים אינו משתנה כאשר הם זזים, כלומר משקלו של גוף זהה בין אם הוא במנוחה בתחנת רכבת, ובין אם הוא בתוך רכבת החולפת ליד התחנה. מאחר שהמשקל הוא כח, ניתן להכליל כי גם כוחות אחרים לא משתנים, כלומר

$$F' = F$$

ואנו מוצאים שאם $F = ma$ אזי גם

$$F' = m'a'$$

בעיקבות טרנספורמצית גליליי. כלומר <u>חוקי הפיזיקה במערכת אחת זהים לחוקי הפיזיקה במערכת שנעה במהירות קבועה ביחס אליה</u>. לזה קוראים עיקרון היחסות:

חוק 1.1 <u>עיקרון היחסות:</u>
חוקי הפיזיקה הם בעלי אותה צורה בכל המערכות הנעות זו ביחס לזו במהירות קבועה בקו ישר.

יש לעיקרון הזה השלכה מאוד חשובה. נניח כי המערכת S מייצגת כוכב רחוק, שנמצא בראשית הצירים שלה. הצופה S', נמצא בתוך מעבדה סגורה. האם הוא יכול לדעת על קיומו של הכוכב הרחוק? אם הוא יפתח חלון, אזי אור מהכוכב יגיע אליו,

ובודאי שהוא יבחין בו. במצב זה הצופה S' יוכל לבצע תצפיות על הכוכב ולקבוע את המהירות היחסית ביניהם. אבל אם המעבדה אטומה אזי S' מוגבל לביצוע ניסויים "מקומיים", כלומר הוא יכול להשתמש רק בחפצים שנמצאים בסביבתו המיידית ואינו מבצע אינטראקציה ישירה עם הכוכב (שקודם הוא ביצע דרך האור שהגיע מהכוכב אל המעבדה). חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות, כלומר הם יהיו אותו דבר בין אם המהירות של S ביחס לכוכב היא $V = 1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ או $V = 2000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, או במילים אחרות הם בלתי תלויים ב-V. לפיכך, שום ניסוי שלא מתייחס ישירות לכוכב, לא יכול למדוד את המהירות V.

במילים פשוטות,

חוק 1.2 עיקרון הבידוד:

אם עיקרון היחסות נכון, אזי שום צופה לא יכול לדעת אם הוא נע (או כמה מהר הוא נע) ביחס לעצמים שאין לו יכולת לצפות בהם, ולתנועה שכזו אין שום השפעה על מה שהוא רואה סביבו.

דוגמאות פשוטות לכך:

- אנו בני האדם נמצאים בתנועה מתמדת במהירות של כ-$30\,\mathrm{km}/\mathrm{s}$ במסלול סביב השמש, אבל אנו לא חשים בכל כלל.
- כאשר אדם נוסע במטוס במהירות של $800 - 1000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, אין לא שום תחושה של גודל המהירות.

שימו לב שמדובר כאן על שתי מערכות שנעות במהירות קבועה זו ביחס לזו. אם יש תאוצה, אז ניתן להבחין בה, למשל כאשר אוטובוס מאיץ או בולם, כל האנשים בתוכו מרגישים זאת היטב. אבל אם הוא נע במהירות קבועה, הדרך היחידה של האנשים להרגיש בתנועה היא להביט מהחלונות על עצמים חיצוניים (למעשה, אוטובוס הוא דוגמא רעה, כי יש תמיד מעט תאוצה אנכית הנובעת מהמהמורות בכביש, למרבה הצער).

1.2.1 עיקרון היחסות וטרנספורמצית גלילי

מנוסחאות (1.1), (1.2) ו-(1.3) ניתן מיד לקבל

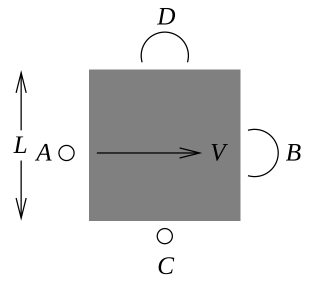
$$x = x' + Vt' \tag{1.4}$$

$$t = t' \tag{1.5}$$

$$v = v' + V \tag{1.6}$$

וברור כי זו למעשה טרנספורמצית גלילי מהמערכת S' אל המערכת S. יש לשים לב שניתן לקבל את הטרנספורמציה הזו מנוסחאות (1.1), (1.2) ו-(1.3) ע"י הצעדים הבאים:

1. החלפת האותיות המתוייגות בלא מתוייגות (x מתחלף עם x' וכו').
2. החלפת V ב-$-V$.



איור 1.2: שולחן עם מראות במעבדה שנעה יחסית לאתר במהירות V.

העובדה הזאת מתחייבת מתוך עיקרון היחסות, משום שחוקי הפיזיקה, ובכלל זה טרנספורמצית הקואורדינטות, צריכים להיות מאותה צורה עבור כל הצופים, אלא שבעוד ש-S' נע יחסית ל-S במהירות V, S נע יחסית ל-S' במהירות $-V$ (משום ששניהם מכוונים את הכיוון החיובי של ציר ה-x שלהם באותו כיוון).

תכונה זו של טרנספורמצית הקואורדינטות תשרת אותנו מאוחר יותר.

1.3 הניסוי של מיכלסון ומורלי

בעבר חשבו הפיזיקאים כי הגלים האלקטרומגנטים, דהיינו האור, נעים בתוך תווך שנקרא "אתר", משום שהם לא היו יכולים לתפוס את הרעיון של גל שמתקדם בלי תווך שבו מתרחשות התנודות (כגון האוויר בגלי קול). מהירות האור (שסימנה c) היתה צריכה להיות מוגדרת לפיכך יחסית לאתר. עכשיו, מכיוון שכדור הארץ עצמו נע יחסית לאתר, צריך להיות הבדל בין מהירות האור ביחס לארץ לבין מהירות האור ביחס לאתר.

כדי להדגים זאת, הביטו באיור 1.2, המראה מבט מלמעלה על שולחן ריבועי עם צלע L הנמצא במעבדה שנעה ביחס לאתר במהירות V, בכיוון שמתואר בשרטוט. אנו נתאר לעצמינו ניסוי היפוטטי שבו אנו שולחים אור ממקור C אל גלאי שנמצא ב-D. מחלוקת המרחק L בזמן שלוקח לאור לנוע מהמקור לגלאי, נקבל את מהירות האור c. c הזו תהיה מהירות האור ביחס לאתר, כי בציר CD אין תנועה ביחס אליו. לעומת זאת, אם נבצע את אותו ניסוי עם מקור A וגלאי B, נקבל

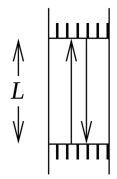
$$c' = c - V$$

כלומר מהירות אור קטנה יותר.

בשנת 1887 ביצעו שני מדענים, מיכלסון ומורלי ניסוי למדידת ההפרש הזה[2], אבל לא נמדד שום הפרש. מאז חזרו על הניסוי (בגרסאות שונות) פעמים רבות, אך הערך של מהירות האור תמיד נמצא להיות

$$c = 2.998\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

[2] ניסוי מיכלסון מורלי הוא לא הניסוי ההיפותטי שתיארתי, אבל העיקר שלא נמדד שום הפרש, כלומר c היה זהה.



איור 1.3: שעון אור היפותטי שיכול לשמש לכיול שעונים.

ולכן, אין מנוס מהמסקנה הבאה: מהירות האור היא תמיד c, ללא קשר לתנועה של מי שמודד אותה.

1.4 טרנספורמצית גליליי נכשלת

נניח עתה כי הצופה S מביט בגל אלקטרומגנטי ומוצא שהוא נע במהירות c. מטרנספורמצית גלילי נובע כי הצופה S' יביט באותו גל אלקטרומגנטי, וימדוד מהירות

$$c' = c - V$$

שאינה c. אבל העובדות הן שכולם מודדים c. לפיכך טרנספורמצית גליליי לא עומדת במבחן הניסוי, ועל כן שגוייה.

1.5 התארכות הזמן

אנו נדגים עכשיו את אחת התוצאות המדהימות ביותר של העובדה כי c קבועה לכולם. נניח כי אנו בונים מתקן לכיול שעונים, המורכב משתי מראות המורכבות זו מול זו, כבאיור 1.3 . משך הזמן שלוקח לאור ללכת מצד אחד לצד השני נתון בנוסחא

$$T_0 = \frac{L}{c}$$

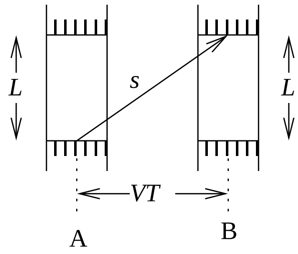
הבה נגדיר את משך הזמן T_0 יותר בדקדקנות: T_0 הוא משך הזמן המבדיל בין שני מאורעות:

1. האור עזב את המראה התחתונה.
2. האור הגיע למראה העליונה.

ניתן דעתנו עתה על אותם שני מאורעות, כפי שהם נראים במערכת שבה השעון נע במהירות V בכיוון האופקי, כבאיור 1.3 . השעון היה בתחילה בנקודה A ותוך כדי תנועת האור הוא נע לנקודה B במשך זמן T. חשוב להבין שמכיוון שאין תנועה יחסית בציר האנכי בין שתי המערכות, הן בעצם משתמשות באותו ציר y, כלומר האורך האנכי L, שהוא אורך השעון, הוא זהה.

עכשיו, האורך שנע האור הוא לפי משפט פיתגורס,

$$s = \sqrt{(VT)^2 + L^2}$$



איור 1.4: שעון האור נע במהירות V.

המהירות שבה האור נע היא s/T והיא <u>חייבת להיות</u> c, לפיכך

$$\begin{aligned} c &= \frac{s}{T} = \frac{\sqrt{(VT)^2+L^2}}{T} \\ &= \sqrt{V^2+\frac{L^2}{T^2}} \end{aligned}$$

מכאן ניתן להסיק את הקשר

$$\begin{aligned} c^2 &= V^2+\frac{L^2}{T^2} \\ \frac{L^2}{T^2} &= c^2-V^2 \\ L^2 &= (c^2-V^2)T^2 \end{aligned}$$

מצד שני, במערכת המנוחה של השעון, משך הזמן בין <u>אותם שני מאורעות</u> הוא $T_0 = L/c$, כלומר,

$$\begin{aligned} L &= cT_0 \\ L^2 &= c^2T_0^2 \end{aligned}$$

נובע מכך כי

$$\begin{aligned} (c^2-V^2)T^2 &= c^2T_0^2 \\ T^2 &= \frac{c^2T_0^2}{c^2-V^2} \\ &= \frac{T_0^2}{1-V^2/c^2} \end{aligned}$$

כלומר

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

הגורם $1/\sqrt{1-V^2/c^2}$ מופיע פעמים רבות בתורת היחסות, ולכן ניתן לו סמל משלו:

$$\frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \equiv \gamma(V)$$

שימו לב כי $T > T_0$. כלומר הזמן שלוקח לתהליך הפיזיקלי של תנועת האור להתרחש, הוא ארוך יותר במערכת שבה השעון בתנועה. עכשיו נשתמש בעיקרון היחסות: נניח שהיה קיים שעון שמתקתק בקצב זהה בכל המערכות, שנקרא לו C. אזי צופה S היה יכול למדוד את בעזרת C את הזמן T_0 שלוקח לאור לעבור בין שתי המראות בשעון האור. אחר כך, היה לוקח S את השעון זהה-הקצב ואת שעון האור ועולה על רכבת. בתוך תא אטום ברכבת הוא שוב היה מודד בעזרת C את משך הזמן של תנועת האור. מאחר שקצב התיקתוק של השעון C זהה בכל המערכות, אזי הוא היה מוצא הבדל בין הזמן T_0 שמדד בתחנת הרכבת ובין הזמן T שהוא מודד בתוך הרכבת הנעה. בעזרת היחס T/T_0 הוא היה יכול לחשב את V, מהירותו ביחס לקרקע, ע"י ביצוע ניסוי "מקומי", כלומר מבלי להביט החוצה. מאחר זה סותר את עיקרון היחסות, אנו מסיקים כי כל השעונים יעברו את אותו שינוי.

לפיכך הגיוני לאמר, עד כמה שהדבר נשמע משונה, כי הזמן חולף בקצב שונה עבור צופים שונים.

בחיי היום יום אין אנו מרגישים בתוצאות המוזרות האלה. הדבר נובע מהערך המספרי של c, שגדול בהרבה מכל מהירות שאנו נתקלים בה. מה צריכה להיות המהירות היחסית כדי שתתרחש התארכות של אחוז אחד?

$$\begin{aligned}
\frac{T}{T_0} &= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = 1.01 \\
\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} &= \frac{1}{1.01} \\
1-\frac{V^2}{c^2} &= \left(\frac{1}{1.01}\right)^2 \\
\frac{V^2}{c^2} &= 1-\left(\frac{1}{1.01}\right)^2 \\
V &= c\sqrt{1-\left(\frac{1}{1.01}\right)^2} \\
&= 3\times 10^8\sqrt{1-\left(\frac{1}{1.01}\right)^2} \\
&= 4.2\times 10^7\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \\
&\simeq 42,000,000\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

מהירותו של מטוס קרב היא לכל היותר כמה פעמים מהירות הקול,

$$V_{\text{jet-fighter}} < 3400\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

מה הפלא אם כן שאין רואים אפקטים יחסותיים ביום-יום? היכן כן צופים בהם? במאיצי חלקיקים ישנם חלקיקים שנעים במהירויות אדירות. לחלקיקים האלה יש זמן חצי חיים אופייני שלאחריו הם מתפרקים. בניסויים נמצא כי החלקיקים לוקח יותר זמן להתפרק, ככל שהם נעים מהר יותר, בדיוק לפי נוסחת איינשטיין[2, 5].

1.6 טרנספורמצית לורנץ

ראינו אם כן, שטרנספורמצית גליליי נכשלה. עלינו לפתח טרנספורמציה חדשה. אנו צריכים לחשוב במונחים של מאורעות. לכל מאורע יש מקום שבו הוא מתרחש, וזמן שבו הוא מתרחש. לפיכך אנו רוצים למצוא את ההתאמה בין הקורדינטות של מאורע במערכת S, הלא הן x, t לבין הקורדינטות ב-S' של אותו המאורע x', t'. נתחיל שוב עם הדרישה שכאשר $t = t' = 0$ אזי ראשיתות הצירים מתלכדות,

$$x(t = 0) = 0 = x'(t' = 0)$$

ברור לנו כי לכל מאורע במערכת אחת, מתאים מאורע אחד ויחיד במערכת השנייה, כלומר הטרנספורמציה צריכה להיות ליניארית,

$$\begin{aligned} x' &= Ax + Bt \\ t' &= Cx + Dt \end{aligned}$$

כמו כן, משמעות המשפט "S' נעה במהירות V ביחס ל-S" היא בדיוק זו, שהנקודה $x' = 0$ נמצאת בכל זמן t במרחק $x = Vt$ מהנקודה $x = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= A(Vt) + Bt \\ \Rightarrow B &= -AV \end{aligned}$$

כמו כן, מאותם שיקולים בדיוק, ברור כי הנקודה $x = 0$ בכל זמן t' צריכה להתאים ל-$x' = -Vt'$, ולפיכך

$$\begin{aligned} -Vt' &= Bt \\ t' &= Dt \\ \Rightarrow -V &= \frac{B}{D} \\ B &= -VD \end{aligned}$$

אבל

$$B = -AV$$

ולכן

$$A = D$$

כלומר הטרנספורמציה נראית עכשיו כך:

$$\begin{aligned} x' &= A(x - Vt) \\ t' &= Cx + At \end{aligned}$$

נחזור עכשיו לרגע שבו שתי מערכות הצירים מתלכדות. עכשיו נניח שברגע $t = t' = 0$ נדלק לרגע פנס בנקודה $x = x' = 0$, ולפיכך מתפשט גל אור במהירות c. במערכת S הוא יגיע למרחק x מהראשית כעבור זמן t. במערכת S' הוא יגיע למרחק x' כעבור זמן t'. לפיכך

$$\begin{aligned} c = \frac{x'}{t'} &= \frac{x}{t} = c \\ \frac{x'}{t'} &= \frac{x}{t} \\ \frac{A(x-Vt)}{Cx+At} &= \frac{x}{t} \end{aligned}$$

אבל $x = ct$ ולכן

$$\begin{aligned} \frac{A(ct-Vt)}{Cct+At} &= c \\ \frac{A(c-V)}{Cc+A} &= c \\ A(c-V) &= c^2C + Ac \\ Ac - AV &= c^2C + Ac \\ C &= -\frac{V}{c^2}A \end{aligned}$$

לפיכך הטרנספורמציה היא

$$\begin{aligned} x' &= A(x-Vt) \\ t' &= A\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

עכשיו, לפי עיקרון היחסות <u>חוקי הטבע זהים בכל המערכות</u>. כלומר הטרנספורמציה מ-S' ל-S צריכה להיות אותה טרנספורמציה כמו מ-S ל-S', רק עם $-V$ (ראינו את זה עבור טרנספורמצית גליליי בחלק 1.2.1), כלומר[3] $x' = A(x' + Vt')$,

$$\begin{aligned} x &= A(x'+Vt') \\ &= A\left[A(x-Vt) + VA\left(t - \frac{V}{c^2}x\right)\right] \\ &= A^2(x-Vt) + VA^2\left(t - \frac{V}{c^2}x\right) \\ &= A^2x - A^2Vt + VA^2t - A^2\frac{V^2}{c^2}x \\ &= A^2\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)x \end{aligned}$$

[3] למעשה, היינו צריכים לרשום $x' = A_{(-V)}(x' + Vt')$ משום ש-A יכול להיות תלוי בסימן של V גם הוא. במקרה זה היינו מקבלים $A_{(-V)}A_{(+V)} = 1/(1 - V^2/c^2)$. אפשר ע"י חקירה נוספת להכריע כי $A_V = A_{-V}$, ע"י פתירת המשוואות $x' = x'(x,t), t' = t'(x,t)$ עבור x, t ודרישת עיקביות לפי עיקרון היחסות. כאן אני אסתפק בלאמר שהבחירה $A_{(-V)} = A_{(+V)} \equiv A$ מהווה פיתרון שעיקבי עם מסקנות אחרות מההנחות, כגון התארכות הזמן, ולכן היא הפתרון הנכון.

לפיכך

$$x = A^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)x$$
$$1 = A^2\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)$$
$$A = \frac{1}{\sqrt{1-V^2/c^2}} \tag{1.7}$$

במשוואה (1.7) לקחנו את השורש החיובי, משום שאנו יודעים מהגבול $V/c \to 0$ שה-טרנספורמציה הנכונה היא טרנספורמצית גליליי, ועבורה $A = 1$.

לביטוי שקיבלנו עבור A קראנו בעבר $\gamma(V)$. הטרנספורמציה השלמה היא לפיכך

$$x' = \gamma(V)(x - Vt) \tag{1.8}$$
$$t' = \gamma(V)\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \tag{1.9}$$

ושמה "טרנספורמצית לורנץ".

1.7 התקצרות האורך

בדומה לאפקט של התארכות הזמן, מסתבר כי גם אורכים של גופים אינם מוחלטים, אלא תלויים במערכת היחוס שבה הם נמדדים. נניח שיש מקל שאורכו L_0 במערכת בה הוא במנוחה. אותו המקל נע במהירות v במערכת S. נניח שיש אדם במערכת S שרוצה למדוד את אורך המקל. הוא מחכה שהמקל יחלוף על פניו ומודד את משך הזמן שזה לוקח. הוא מסיק שאורך המקל הוא

$$L = vT$$

מצד שני, במערכת בה המקל במנוחה, האדם נע במהירות $-v$ מרחק L_0, במשך זמן $\tau = \gamma T$ ארוך יותר, לפי התארכות הזמן. לפיכך

$$L_0 = v\tau = \gamma v t = \gamma L$$

כלומר

$$L = \frac{L_0}{\gamma}$$

המקל קצר יותר כשהוא נע. זה נקרא <u>התקצרות האורך</u>.

1.8 איזה זמן הוא הקצר יותר?

בספרים פופולריים (וגם פופולריים פחות) על תורת היחסות, כתוב כי "שעון נע מתקתק לאט יותר משעון הנמצא במנוחה". משפט זה נכון, אך לאור עיקרון היחסות, נשאלת השאלה: נניח כי שעון C נמצא במנוחה במערכת S, ושעון C' נמצא במנוחה במערכת S', הנעה במהירות V ביחס ל-S.

צופה במערכת S ימצא כי "C' מתקתק לאט יותר מ-C". לעומתו, צופה ב-S' ימצא כי "C מתקתק לאט יותר מ-C'". האם יש לנו כאן סתירה, כלומר פרדוקס?

התשובה היא לא. נניח כי השעון C שנמצא בידו של הצופה ב-S מודד פרק זמן t. במערכת S פרק הזמן t הוא ההבדל הזמני בין שני מאורעות, המתרחשים באותו מקום (כלומר ההבדל המרחבי ביניהם הוא אפס). שני המאורעות הללו הם $A = (x, 0), B = (x, t)$ המתרחשים באותו מקום x בהבדל זמן t. המאורעות המתאימים במערכת S' נתונים ע"י משוואות (1.8) ו-(1.9),

$$
\begin{aligned}
x'_A &= \gamma x \\
t'_A &= -\frac{\gamma V}{c^2} x \\
x'_B &= \gamma (x - Vt) \\
t'_B &= \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right)
\end{aligned}
$$

כלומר יש ביניהם הבדל זמן של

$$
\begin{aligned}
t'_B - t'_A &= \gamma \left(t - \frac{V}{c^2} x \right) - \left(-\frac{\gamma V}{c^2} x \right) \\
&= \gamma t - \gamma \frac{V}{c^2} x + \gamma \frac{V}{c^2} x \\
&= \gamma t
\end{aligned}
$$

כלומר הזמן במערכת S', שבה השעון C בתנועה, ארוך יותר, כפי שצריך להיות. כמו כן יש ביניהם הבדל מרחבי

$$
\begin{aligned}
x'_B - x'_A &= \gamma (x - Vt) - \gamma x \\
&= \gamma x - \gamma V t - \gamma x \\
&= -\gamma V t
\end{aligned}
$$

אם נציב את $t'_B - t'_A = \gamma t$ נקבל

$$
x'_B - x'_A = -V (t'_B - t'_A)
$$

וזה ברור, משום שאותה נקודה x נעה במערכת S' במהירות $-V$.

ראינו שמאורעות שיש ביניהם הבדל זמני בלבד מתורגמים למאורעות עם הבדל זמני והבדל מרחבי. כל צופה משווה את קצב תיקתוקם של שעונים לשעון שלו, שנמצא יחסית אליו במנוחה. כלומר, "C' מתקתק לאט יותר מ-C" עבור צופה מ-S, משום ש-C נמצא במנוחה במערכת S. כמו כן "C מתקתק לאט יותר מ-C'" עבור צופה במערכת S', עבור מאורעות שבהם C' במנוחה.

כפי שראינו קבוצת המאורעות מהסוג "C במנוחה וחולף זמן" היא לא קבוצת המאורעות מהסוג "C' במנוחה וחולף זמן", ולכן מדידות הזמן של שני הצופים לא מתנגשות זו עם זו, ואין פרדוקס.

1.9 טרנספורמצית המהירויות

כדי להשלים את התמונה של טרנספורמצית לורנץ, עלינו לדון בטרנספורמציה של מהירויות ממערכת אחת לשנייה. במילים פשוטות, יש לענות על השאלה: אם חלקיק נע במהירות u במערכת S, מהי מהירותו u' במערכת S'?

נניח כי במערכת S החלקיק נע מרחק dx בזמן dt (אלה הבדלים דיפרנציאליים בין שני מאורעות). במערכת S' אותם שני מאורעות נבדלים ב-dx' ו-dt'. לפי (1.8) ו-(1.9) ניתן לקבל,

$$
\begin{aligned}
dx' &= \gamma(dx - V dt) \\
dt' &= \gamma\left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right)
\end{aligned}
$$

לפיכך

$$
\begin{aligned}
u' = \frac{dx'}{dt'} &= \frac{\gamma(dx - V dt)}{\gamma\left(dt - \frac{V}{c^2} dx\right)} \\
&= \frac{dx - V dt}{dt - \frac{V}{c^2} dx} \\
&= \frac{dx/dt - V}{1 - \frac{V}{c^2}(dx/dt)}
\end{aligned}
$$

אבל $dx/dt = u$ ולכן

$$
u' = \frac{u - V}{1 - \frac{Vu}{c^2}} \tag{1.10}
$$

שימו לב שהאור נע במהירות $u = c$ במערכת אחת, המהירות u' המתאימה היא

$$
\begin{aligned}
u' &= \frac{c - V}{1 - \frac{Vc}{c^2}} \\
&= \frac{c - V}{1 - V/c} \\
&= \frac{c}{c}\frac{c - V}{1 - V/c} \\
&= c\frac{c - V}{c - V} = c
\end{aligned}
$$

כלומר אכן <u>מהירות האור זהה בכל המערכות</u>. אם $V/c \ll 1$ אזי ניתן להזניח את Vu/c^2 לעומת 1 במכנה ומקבלים

$$
u' = u - V
$$

כמו בטרנספורמצית גלילי. הטרנספורמציה ההפוכה כמובן היא

$$
u = \frac{u' + V}{1 + \frac{Vu'}{c^2}}
$$

איור 1.5: תיבה הנדחפת על גבי שולחן.

1.10 מהירות האור היא המהירות העליונה

כדי שנוכל להמשיך, עלינו קודם כל להראות כי מהירות האור היא המהירות העליונה האפשרית. כדי לנמק זאת, ניתן להשתמש בעיקרון של סיבתיות. כדוגמא, נניח כי תיבת עץ באורך L מונחת על שולחן. ברגע $t = 0$ אדם שרוצה לדחוף את התיבה, מתחיל להפעיל כח F על הקצה הימני שלה (איור 1.5). תמונת העולם הנאיבית שרובנו מחזיקים בה, היא שהתיבה מתחילה לנוע כתוצאה מהשפעת הכח. כמו כן, לפי החוק השלישי של ניוטון התיבה מפעילה כח שווה ומנוגד על האדם.

מצד שני, לכל אחד ברור כי הכח שהתיבה מפעילה הוא כח "תגובה", כלומר הוא התוצאה של הכח שהפעיל האדם, ולא להיפך. במילים אחרות, קודם האדם הפעיל כח, ורק אחר-כך הופעל כח התגובה. נובע מכך, שלזמן קצר (אך לא אפס) החוק השלישי של ניוטון לא התקיים: החוק השלישי של ניוטון לא תואם את הסיבתיות, כלומר את העובדה שאחד הכוחות הוא סיבה והשני תוצאה.

כמו כן, ברור כי הקצה השמאלי של התיבה התחיל לנוע כתוצאה מתנועת הקצה הימני. כלומר, הכח F השפיע על הקצה הימני, וזה בתורו השפיע על החלקים של התיבה שסמוכים אליו, וכך הלאה, עד שההשפעה הגיעה לקצה השמאלי. לפיכך ברור גם כי היה זמן קצר (אך לא אפס) שבו הקצה הימני כבר האיץ, אך הקצה השמאלי עוד לא, כלומר התיבה נמתחה מעט.

חשוב להדגיש כי עקרונית אולי היה ניתן שהחוק השלישי של ניוטון יתקיים, ושלא תהיה סיבתיות במובן שאני מציג כאן, אבל העובדה הניסיונית היא שהחוק השלישי של ניוטון לא מתקיים, ולוקח פרק זמן סופי לתנועה לעבור מקצה אחד לשני. החשיבה הטהורה לא מספיקה כאן.

כמה ארוך אותו פרק זמן הדרוש על מנת שהכח המופעל על קצה אחד ישפיע על הקצה השני? זה תלוי כבר במבנה של החומר בו מדובר, אך ברור כי הזמן הזה חייב להיות גדול מאפס, בגלל הסיבתיות (סיבה חייבת להיות קודמת לתוצאה). אנו יכולים לחשוב על כך שעובר "אות" מסויים מהקצה האחד לשני. המהירות שבה האות מתקדם חייבת להיות סופית, משום שמהירות אינסופית פירושה שמעבר האות לא דורש זמן.

אם כך קשרנו בין קיומן של סיבות ותוצאות למהירות סופית של העברת אותות פיזיקליים. עכשיו, כדי שיהיה מובן מוחלט לסיבתיות, צריכה להיות מגבלה על מהירות מעבר האותות. אחרת, יהיה עקרונית ניתן לבנות חומרים שבהם האות יעבור מהר יותר ומהר יותר, ללא גבול. לפיכך, צריכה להיות מהירות עליונה.

עכשיו, המהירות העליונה, מאחר שהיא קבוע של הטבע, חייבת להיות זהה בכל מערכות הייחוס, מתוקף עיקרון היחסות. כפי שראינו, המהירות המתאימה לזה היא

מהירות האור, c. כמו כן, ברור כי שום חלקיק לא יכול לנוע מהר יותר מ-c, מכיוון שאחרת יהיה ניתן להעביר בעזרתו אותות מהר יותר מהמהירות העליונה, ולפי הגדרה זה לא אפשרי.

1.11 החוק השני של ניוטון והתנע

לפי החוק השני של ניוטון,

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \tag{1.11}$$

כאשר $\mathbf{p}$ הוא התנע של חלקיק ו-$\mathbf{F}$ הכח הפועל עליו. כדי שיהיה תוכן לחוק השני של ניוטון, עלינו לאמר מהו $\mathbf{F}$, ואז החוק השני מסביר לנו כיצד תושפע תנועתו של הגוף. ניקח את המקרה הפרטי של כח קבוע, ונניח כי ברגע $t = 0$ הגוף נמצא במנוחה. לפי (1.11),

$$\mathbf{p} = \mathbf{F}t$$

וככל שהזמן יעבור, התנע יגדל ללא גבול. נובע מזה שהנוסחא הניוטונית $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ (כאשר $\mathbf{u}$ היא מהירות הגוף) לא יכולה להיות נכונה, משום שאם כך, כח קבוע היה יכול להגדיל את $\mathbf{u}$ מעבר ל-c, וזה לא ייתכן, כי c היא המהירות העליונה. לפיכך, שומה עלינו לחפש נוסחא אחרת ל-$\mathbf{p}$. מאחר שאנו יודעים שנוסחא זו היא בקירוב $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ עבור $|\mathbf{u}| \ll c$, ניתן להניח כי

$$\mathbf{p} = w(u)\mathbf{u}$$

כאשר $w(u \ll c) \simeq m$. כדי לברר את $w(u)$, נחזור אל חוק חיבור המהירויות,

$$u = \frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}$$

כאשר u היא מהירותו של גוף במערכת S ו-u' מהירותו במערכת S' שנעה יחסית ל-S במהירות V.

ניתן דעתנו עכשיו על התסריט הבא: במערכת S' יש שני גופים זהים, האחד נע במהירות $u' = V$ והשני במהירות $-u' = -V$. הגופים מתנגשים ויוצרים גוף חדש שבהכרח נמצא במנוחה. אנו יודעים כי במהירויות נמוכות, המסה של הגוף הנוצר שווה לסכום המסות של הגופים שיצרו אותו $M = m+m$, וכמו כן אנו יודעים כי המסה היא המקדם של המהירות בנוסחא לתנע. לכן, נניח עבור מצב שבו המהירויות לא נמוכות כי מתקיים קשר אנלוגי

$$W = w + w$$

הקשר הזה הופך ל-$M = m + m$ במהירויות נמוכות.

כיצד זה נראה במערכת S? המהירות של שני הגופים היא

$$u_1 = \left.\frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}\right|_{u'=V} = \frac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}} \tag{1.12}$$

$$u_2 = \left.\frac{u' + V}{1 + \frac{u'V}{c^2}}\right|_{u'=-V} = 0 \tag{1.13}$$

כלומר האחד נע במהירות u_1 עם תנע $w(u_1)u_1$, והשני במנוחה עם מסה m $w(0) =$. לאחר ההתנגשות הגוף החדש, נראה במערכת S כאילו הוא נע במהירות V, עם תנע $W(V)V$, כאשר $M = W(0)$, מסת הגוף החדש. שימור תנע במערכת S:

$$W(V)V = w(u_1)u_1 \tag{1.14}$$

וכמו כן

$$\begin{aligned} W(V) &= w(u_1) + w(0) \\ &= w(u_1) + m \end{aligned} \tag{1.15}$$

נוסחא (1.15) תהפוך לקשר המוכר $M = m + m$ בנסיבות של מהירויות נמוכות. ניתן לשחק עם המשוואות ולקבל

$$\begin{aligned} V &= \frac{w(u_1)u_1}{m + w(u_1)} \\ mV + w(u_1)V &= w(u_1)u_1 \\ mV &= w(u_1)(u_1 - V) \\ \Rightarrow \frac{w(u_1)}{m} &= \frac{V}{u_1 - V} \end{aligned} \tag{1.16}$$

עכשיו, מתוך (1.12),

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}} \\ 1 + \frac{V^2}{c^2} &= \frac{2V}{u_1} \\ \frac{V^2}{c^2} - \frac{2V}{u_1} + 1 &= 0 \\ V^2 - \frac{2c^2}{u_1}V + c^2 &= 0 \end{aligned}$$

ניתן לפתור משוואה זו עבור V, המהירות בה ינוע הגוף החדש לאחר ההתנגשות,

$$\begin{aligned}
V &= \frac{\frac{2c^2}{u_1} \pm \sqrt{4\left(\frac{c^2}{u_1}\right)^2 - 4c^2}}{2} \\
&= \frac{c^2}{u_1} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{u_1}\right)^2 - c^2} \\
&= \frac{c^2}{u_1} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{u_1}\right)^2 \left(1 - c^2\left(\frac{u_1}{c^2}\right)^2\right)} \\
&= \frac{c^2}{u_1} \pm \frac{c^2}{u_1}\sqrt{1 - \frac{c^2 u_1^2}{c^4}} \\
&= \frac{c^2}{u_1}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right] \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

נשאלת השאלה, איזה סימן של השורש, $+$ או $-$ יש לקחת? כדי לברר זאת, ניזכר כי בגבול הלא יחסותי $u_1/c \ll 1$ ולכן $\sqrt{1-(u_1/c)^2} \simeq 1 - \frac{u_1^2}{2c^2}$, ולפיכך

$$\begin{aligned}
V &\simeq \frac{c^2}{u_1}\left[1 \pm \left(1 - \frac{u_1^2}{2c^2}\right)\right] \\
&= \begin{cases} \frac{2c^2}{u_1} - \frac{u_1}{2} & + \\ \frac{u_1}{2} & - \end{cases}
\end{aligned}$$

מאחר שבגבול הזה, לפי חוק חיבור המהירויות

$$u_1 = \frac{2V}{1 + \frac{V^2}{c^2}} \to 2V$$

מתחייב לקחת את הסימן השלילי ב-(1.17). לכן

$$V = \frac{c^2}{u_1}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right]$$

לפיכך

$$\begin{aligned}
u_1 - V &= u_1 - \frac{c^2}{u_1}\left[1 - \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right] \\
&= \frac{c^2}{u_1}\left[\frac{u_1^2}{c^2} - \left(1 - \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right)\right] \\
&= \frac{c^2}{u_1}\left(\frac{u_1^2}{c^2} - 1 + \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right) \\
&= \frac{c^2}{u_1}\left(\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}} - \left(1 - \frac{u_1^2}{c^2}\right)\right) \\
&= \frac{c^2}{u_1}\sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{u_1^2}{c^2}}\right)
\end{aligned}$$

עכשיו,

$$\begin{aligned}
\frac{V}{u_1 - V} &= \frac{\frac{c^2}{u_1}\left[1-\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}\right]}{u_1 - V} \\
&= \frac{\frac{c^2}{u_1}\left[1-\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}\right]}{\frac{c^2}{u_1}\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}\left(1-\sqrt{1-\frac{u_1^2}{c^2}}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-u_1^2/c^2}}
\end{aligned}$$

את זה ניתן להציב ב-(1.16), ולפיכך הגענו למסקנה כי

$$\frac{w(u_1)}{m} = \frac{1}{\sqrt{1-u_1^2/c^2}} \equiv \gamma(u_1)$$

כלומר עבור גוף שנע במהירות v

$$w(v) = \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma(v)m$$

ולפיכך התנע של גוף שנע במהירות v הוא

$$p = w(v)v = \gamma(v)mv \tag{1.18}$$

הגענו אם כך לנוסחא של התנע במצבים יחסותיים (כלומר, מצבים שבהם v אינו זניח ביחס ל-c). נחזור לסוגייה של כח קבוע שאיתה התחלנו. עבור כח קבוע (לשם הפשטות נחזור לתנועה במימד אחד) הפועל על גוף שמתחיל את תנועתו במנוחה,

$$p = Ft$$

כלומר

$$\begin{aligned}
\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} &= Ft \\
mv &= Ft\sqrt{1-v^2/c^2} \\
m^2v^2 &= Ft\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right) \\
m^2v^2 &= F^2t^2 - \frac{F^2t^2}{c^2}v^2 \\
v^2\left(m^2+\frac{F^2t^2}{c^2}\right) &= F^2t^2 \\
v^2 &= \frac{F^2t^2}{m^2+F^2t^2/c^2} \\
v &= \frac{Ft}{\sqrt{m^2+F^2t^2/c^2}}
\end{aligned}$$

מה קורה ככל שהזמן חולף וגודל בלי גבול?

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} v &= \lim_{t\to\infty} \frac{Ft}{\sqrt{m^2+F^2t^2/c^2}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{Ft}\sqrt{m^2+F^2t^2/c^2}} \\ &= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{m^2}{F^2t^2}+\frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1/c^2}} = c\end{aligned}$$

כלומר המהירות במקרה זו שואפת (אך לא מגיעה לעולם) למהירות העליונה c. יש לשים לב לכך שהתנע גודל ללא גבול, אך למרות זאת המהירות מתקרבת לגבול סופי. זאת מכיוון שהקשר בין המהירות לתנע אינו

$$p = mv$$

אלא

$$p = \gamma(v)mv$$

.

1.12 אנרגיה

במכניקה ניוטונית, ההגדרה של העבודה בצירוף החוק השני של ניוטון מובילה למושג האנרגיה הקינטית. ראינו כי קיימת הכללה של התנע למצבים יחסותיים, ועכשיו עלינו לדון בהכללה של מושג האנרגיה.

1.12.1 האנרגיה הפוטנציאלית סותרת את עקרונות תורת היחסות

ראשית חשוב להבין שמושג האנרגיה הפוטנציאלית ממכניקה ניוטונית לא תקף במצבים יחסותיים. כדי להבין מדוע, ניקח כדוגמא את האנרגיה הפוטנציאלית של מטען q_1 הנמצא בשדה שנוצר על ידי מטען q_2 המרוחק r ממנו[4],

$$U = \frac{q_1q_2}{r}$$

האנרגיה של q_1 תלוייה במרחק הרגעי בין שני החלקיקים, r. לפיכך, אם הזזנו את q_2, q_1 מושפע באופן מיידי מכך, כלומר האות עובר במהירות אינסופית, מה שסותר את העובדה ש-c היא המהירות העליונה. לפיכך עלינו לזנוח את המושג של אנרגיה פוטנציאלית.

[4] אני משתמש במערכת היחידות cgs, במערכת SI הנוסחא מכילה את הגורם $1/4\pi\epsilon_0$.

1.12.2 משפט העבודה אנרגיה

נתמקד אם כך במושג האנרגיה הקינטית של חלקיק. אנו רוצים לקבל משפט עבודה-אנרגיה יחסותי. החוק השני של ניוטון הוא

$$F = \frac{dp}{dt}$$

כאשר במצב יחסותי עלינו להשתמש ב-$p = w(v)v$. לפיכך העבודה הנעשית לאורך דרך dx היא

$$\begin{aligned} dW &= Fdx \\ &= \frac{dp}{dt}dx = \frac{dx}{dt}dp \\ &= vdp \end{aligned}$$

עכשיו

$$\begin{aligned} dp &= dv\frac{dp}{dv} = dv\frac{d(wv)}{dv} \\ &= dv[v\frac{dw}{dv} + w] \\ &= vdw + wdv \end{aligned}$$

כלומר

$$dW = v^2dw + wvdv$$

אבל

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dv} &= \frac{d}{dv}\left(\frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{-2v}{c^2} \\ &= \frac{mv/c^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \\ &= \frac{m}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\frac{1}{1-v^2/c^2}\frac{v}{c^2} \\ &= w\frac{v}{c^2-v^2} \end{aligned}$$

לפיכך

$$\begin{aligned} dw &= \frac{wvdv}{c^2-v^2} \\ \Rightarrow wvdv &= (c^2-v^2)dw \end{aligned}$$

נחזור לנוסחא של העבודה,

$$\begin{aligned} dW &= v^2 dw + wv dv \\ &= v^2 dw + (c^2 - v^2) dw \\ &= c^2 dw \end{aligned}$$

כלומר

$$\begin{aligned} W_{1\to 2} &= c^2 w(v_2) - c^2 w(v_1) \\ &= w(v_2)c^2 - w(v_1)c^2 \end{aligned}$$

כזכור, העבודה היא השינוי באנרגיה של הגוף. לפיכך

$$W_{1\to 2} = E_2 - E_1$$

כלומר

$$\begin{aligned} E_1 &= w(v_1)c^2 \\ E_2 &= w(v_2)c^2 \end{aligned}$$

לפיכך הגענו לנוסחא עבור האנרגיה של גוף,

$$\begin{aligned} E &= w(v)c^2 \\ &= \gamma(v) mc^2 \\ &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned}$$

באופן ספציפי, האנרגיה של גוף במנוחה היא[5]

$$E_0 = mc^2$$

ישנן שתי גישות לנוסחא זו, האחת היא לכנות את $E = \gamma mc^2$ "האנרגיה הקינטית" של גוף (זו גישתו של לב לנדאו [3]), באנלוגיה למכניקה ניוטונית שבה העבודה היא ההפרש בכמות $mv^2/2$. השנייה היא לכנות את E "האנרגיה של הגוף" ולהגדיר מחדש את האנרגיה הקינטית בתור "כמות העבודה הדרושה להביא גוף ממנוחה למהירות v", במקרה זה האנרגיה הקינטית היא

$$\begin{aligned} K &= E(v) - E(0) \\ &= [\gamma(v) - 1]mc^2 \end{aligned}$$

[5] זו הנוסחא המפורסמת ביותר בעולם, ובד"כ נכתבת בתור $E = mc^2$. למרבה הצער פירסומה הרב הביא לכך שכתבו עליה הרבה שטויות, וכמו כן היא העניקה לפיזיקה מימד החביב על מיסטיקנים, בעיקבות הרעיון כי "החומר הוא צורה של אנרגיה". אני דן בכך בחלק 1.12.4.

אני נוקט בגישה זו, מכיוון שאז בגבול של מהירויות נמוכות, $v \ll c$, ניתן לקרב את $\gamma(v)$[6]

$$\begin{aligned}\gamma(v) &= \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} \\ &\simeq 1+\frac{v^2}{2c^2}\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}K &= [\gamma(v)-1]mc^2 \\ &\simeq \frac{v^2}{2c^2}mc^2 = \frac{mv^2}{2}\end{aligned}$$

שהיא הנוסחא הניוטונית.

1.12.3 שימור האנרגיה והתנע בהתנגשויות

ראינו כי האנרגיה של גוף היא

$$E = \gamma(v)mc^2$$

כלומר למעשה שווה ל-$E = w(v)c^2$. כאשר עסקנו בהכללה היחסותית של תנע, הנחנו את קיומה של פונקציה $w(v)$, וכמו כן הנחנו שהיא נשמרת בהתנגשויות, לדוגמא משוואה (1.15), או באופן כללי יותר

$$W = w_1 + w_2$$

וכי במצבים לא יחסותיים משוואה זו מבטאת את שימור המסה המוכר לנו ממכניקה ניוטונית.

במבט לאחור, ברור עכשיו כי המשוואה הייתה צריכה להיכתב כך

$$E = E_1 + E_2$$

ומבטאת את חוק שימור האנרגיה. הבה נדון בהתנגשות אלסטית בין שני גופים הנעים במהירויות ניוטוניות, כלומר קטנות ביחס ל-c. מה שקורה הוא, שבמצבים לא יחסותיים, האנרגיה של גוף מורכבת מאנרגיה המנוחה שלו, ועוד האנרגיה הקינטית. זו האחרונה מקורבת ע"י הנוסחא הניוטונית, כלומר במצב לא יחסותי

$$\begin{aligned}E_1 &\simeq m_1c^2 + \frac{m_1v_1^2}{2} \\ E_2 &\simeq m_2c^2 + \frac{m_2v_2^2}{2}\end{aligned}$$

[6]אני מתבסס על הנוסחא $(1+x)^n \simeq 1+nx$ עבור $x \ll 1$, כאשר במקרה שלנו $x = v/c$. ניתן להוכיח אותה בקלות בעזרת טור טיילור.

נניח כי הגופים מתנגשים, ויוצאים מההתנגשות עם מהירויות u_1, u_2 ומסות M_1, M_2. שימור האנרגיה במקרה כזה נותן לנו

$$M_1c^2 + \frac{M_1u_1^2}{2} + M_2c^2 + \frac{M_2u_2^2}{2} = m_1c^2 + \frac{m_1v_1^2}{2} + m_2c^2 + \frac{m_2v_2^2}{2}$$
$$(M_1+M_2)c^2 + \frac{M_1u_1^2}{2} + \frac{M_2u_2^2}{2} = (m_1+m_2)c^2 + \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$$

במקרים בהם המסה נשמרת, הרי $m_1 + m_2 = M_1 + M_2$ ואנו מקבלים את שימור האנרגיה המוכר ממכניקה ניוטונית,

$$\frac{M_1u_1^2}{2} + \frac{M_2u_2^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$$

במקרה שגם המסות כלל לא משתנות, $M_1 = m_1, M_2 = m_2$ המשוואה היא

$$\frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2} = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2}$$

. אבל מסתבר שיש מיקרים שבהם המסה לא נשמרת, ואז חוקי ההתנגשות הם חוק שימור התנע, וחוק שימור האנרגיה המלא, כלומר

$$E_1' + E_2' = E_1 + E_2$$

כאשר E הם האנרגיות של הגופים לפני ההתנגשות, ו-E' לאחר ההתנגשות. דוגמא פשוטה לכך היא ביקוע האורניום, שבו מסות התוצרים קטנות ממסת גרעין האורניום. המסה לא נשמרת בתהליך זה, אבל האנרגיה כן.

1.12.4 רעיון הנפל של שקילות המסה-אנרגיה

אמנם ישנם סופרים שנוגדים את דעתי בנושא זה, אבל ברצוני כאן לנגוד את האמרה המפורסמת ש"מסה שקולה לאנרגיה". ניתן לסתור זאת בכמה אופנים:

1. ההגדרה המקורית של מסה היא שהיא מדד כמותי להתמדה (אינרציה) של גוף. ההתמדה הזו מהווה את המקדם שקובע עד כמה גוף מגיב (בצורה של תאוצה) לכח נתון שמופעל עליו. המסה היא תכונה של הגוף, שמוגדרת באופן אופרטיבי על ידי

$$m = F/a$$

עבור גוף שנע לאט[7]. עכשיו, כידוע האור נע תמיד במהירות c. מאחר שמהירות זו היא קבוע של הטבע, לא ניתן להאט את האור, ואין לו אינרציה באותו מובן שיש לחלקיקים העשויים חומר[8]. מצד שני, ידוע ואף ניתן לחשב את האנרגיה שנמצאת בגלי אור. לפיכך יש אנרגיה ללא מסה, ולכן השתיים לא שקולות.

2. כפי שראינו, המסה אינה נשמרת, אבל האנרגיה כן. לפיכך אין השתיים שקולות.

[7] הגדרה זאת אינה סותרת את היחסות, אלא שיש לדייק ולכתוב $m = \lim_{v\to 0} F/a$

[8] זו המשמעות של האימרה כי הפוטון (חלקיק אור) הוא חלקיק חסר מסה.

3. היה ניתן לעקוף את הסעיף הקודם ע"י כך שנאמר כי המסה היא צורה של אנרגיה, וכי העובדה שהיא אינה נשמרת נובעת מהמרתה לצורה אחרת של אנרגיה. אבל לדעתי יש כאן חוסר קונסיסטנטיות בגישה למושג האנרגיה. למשל, לא תיתכן אנרגיה קינטית בלי מהירות, אבל אף אחד לא חושב שאנרגיה קי-נטית ומהירות הן שקולות, אלא אומרים כי "יש אנרגיה קינטית לגוף נע". באופן דומה אני גורס כי יש לאמר ש"יש אנרגיה בגוף בעל מסה", כך לא כי המסה היא האנרגיה. באופן דומה, האנרגיה הממוצעת של חלקיק בגז אידאלי (לא יחסותי) נתונה בנוסחא $\frac{3}{2}kT$ כאשר T הטמפרטורה ו-k הוא קבוע. למרות זאת אין אנו אומרים כי הטמפרטורה היא אנרגיה, אלא כי יש אנרגיה בגז בעל טמפרטורה T.

לסיכום, הכנסת "שקילות המסה-אנרגיה" לתוך עולם המושגים שלנו יוצרת סיבוך מיותר. היינו צריכים להגדיר אז מסה של פוטון בתור האנרגיה שלו חלקי c^2, מה שהיה יוצר קשיים לאור האמור לעיל.

אם אמנם המושגים שקולים, היה עלינו לזנוח את המושג מסה לחלוטין, ולכנות אותה "אנרגית המנוחה" (למעט במקרה של פוטון, שלעולם אינו במנוחה). זה היה לדעתי מסבך את הסמנטיקה של הפיזיקה, ולא פלא שזה לא קרה, למרות שחלפו כבר יותר מ-100 שנה מאז תגליותיו של איינשטיין.

הסמנטיקה של הפיזיקה אסטטית ופשוטה יותר כאשר המושגים האלו מופרדים, למרות שיש קשר ביניהם. בדיוק כפי שהמושגים "מהירות" ו-"תנע" מופרדים, למרות שיש קשר ביניהם. לפיכך עלינו לבחור בדרך זו, ולזכור שאמנם יש אנרגיה במסה, אך אין פירוש הדבר שהמסה היא אנרגיה או להיפך.

פרק 2

תורת היחסות הפרטית - דיון מתקדם

מאחר שתורת היחסות עוסקת בטרנספורמציה של גדלים פיזיקליים ממערכת קואור-דינטות אחת לאחרת, אנו נתחיל את הדיון שלנו במתמטיקה הנדרשת על מנת לתאר טרנספורמציות שכאלה - חשבון טנזורים.

2.1 טרנספורמצית קואורדינטות וטנזורים

אנו נגלה כי ניתן לתאר באופן מסודר את תכונות הטרנספורמציה של גדלים פיזיקליים בעזרת עצמים שנקראים טנזורים. אנו נתחיל מהסוג הפשוט ביותר של טנזור שאינו טריביאלי - הוקטור, ומשם ההתקדמות כבר תהיה קלה.

2.1.1 וקטורים

אנו נתחיל מתיאור של מרחב N מימדי. זו למעשה קבוצה של נקודות, כאשר נקודה במרחב מתוארת ע"י N קואורדינטות x^μ כאשר $\mu = 1, 2, \ldots N$. נקודה לגבי נוטציה: לעיתים אנו נשתמש בסמל - x כדי לסמן את כל ה - x^μ. ניתן כמובן לתאר את המרחב הזה ע"י סט אחר של N קואורדינטות, $\bar{x}^\mu$, כך שיש טרנספורמציה ממערכת x למערכת $\bar{x}$:

$$\bar{x}^\mu = \bar{x}^\mu(x)$$

השאלה היא, בהנתן גודל פיזיקלי מסויים ϕ במערכת x, מהו אותו גודל $\bar{\phi}$ במערכת y? אפשר לסווג את הגדלים הפיזיקליים לפי תכונות הטרנספורמציה הזו. הטרנספורמציה הפשוטה ביותר

$$\bar{\phi} = \phi$$

גודל כזה נקרא <u>סקלר</u> או <u>אינווריאנט</u>. כמובן, שיתכנו צורות אחרות, מסובכות יותר של טרנספורמציה. כדי לקטלג אותן בצורה מסודרת, כדאי להתחיל מדברים שנכונים

באופן כללי, כמו למשל, הצורה שבה הדיפרנציאל dx^μ עובר טרנספורמציה. אנו יודעים שהדיפרנציאל $d\bar{x}^\mu$ המתאים ל-dx^μ הוא

$$d\bar{x}^\mu = \sum_\nu \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \equiv \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{2.1}$$

כאשר הנגזרות נלקחות בנקודה x^μ. כמו כן הגדרנו את <u>הסכם הסכימה</u>: כאשר אינדקס חוזר פעמיים במשוואה, סימן שסוכמים עליו (הוא רץ על כל הערכים האפשריים, $1, 2, \ldots, N$). במשוואה (2.1) האינדקס ν הוא דוגמא לכך. חשוב להבין כי אין משמעות <u>לשמו</u> של אינדקס שסוכמים עליו, משום שברור כי

$$a^\mu b_\mu \equiv \sum_\mu a^\mu b_\mu = \sum_\nu a^\nu b_\nu \equiv a^\nu b_\nu$$

נחזור לענייננו ולחוק הטרנספורמציה של הדיפרנציאל (2.1). כהכללה, נניח שישנם N גדלים a^μ במערכת x, אזי הם נקראים <u>וקטור</u> אם הם עוברים טרנספורמציה <u>כמו הדיפרנציאל</u>.

$$\bar{a}^\mu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu \tag{2.2}$$

המשוואה (2.2) נקראת "חוק הטרנספורמציה של וקטור".

בנוסף לדיפרנציאל dx^μ, יש עוד משהו שאנו יודעים כיצד הוא עובר טרנספורמציה: הנגזרת $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$, על פי כלל השרשרת של הנגזרות, חייבת לעבור טרנספורמציה כך[1]:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

כדי ליעל את הנוטציה, נציג את הסמל

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

כלומר

$$\bar{\partial}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \partial_\nu$$

באנלוגיה ל-(2.2), נוכל להגדיר סוג נוסף של וקטור, כלומר N מספרים a_μ שעוברים טרנספורמציה (או "מתחלפים") כמו הנגזרת:

$$\bar{a}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} a_\nu \tag{2.3}$$

וקטור a^μ נקרא קונטרה-ואריאנטי, ואילו וקטור a_μ נקרא קו-ואריאנטי.

[1] אנו מסתמכים על כלל השרשרת, כלומר $\frac{\partial F}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial F}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\mu} \frac{\partial F}{\partial x^\nu}$

כדי להכניס מעט מוטיבציה לעניין, הבא נניח שיש לנו שני וקטורים, a^μ ו-b_μ. ניתן לבנות מהם מספר באופן הבא

$$\phi = a^\mu b_\mu$$

(זכרו כי הסכם הסכימה בתוקף, כלומר $\phi = \sum_\mu a^\mu b_\mu$). כיצד עובר ϕ טרנספורמציה, כיצד הוא מתחלף ממערכת למערכת? ובכן, במערכת $\bar{x}$ אנו נקבל

$$\begin{aligned}\bar{\phi} &= \bar{a}^\mu \bar{b}_\mu \\ &= \left(\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} a^\nu\right)\left(\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} b_\rho\right) \\ &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} a^\nu b_\rho\end{aligned}$$

עכשיו נשים לב כי, לפי כלל השרשרת,

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^\nu} = \delta^\rho{}_\nu$$

כאשר $\delta^\rho{}_\nu$ היא הדלתא של קרונקר

$$\delta^\rho{}_\nu = \begin{cases} 1 & \rho = \nu \\ 0 & \rho \neq \nu \end{cases}$$

לפיכך, אם נחזור לחוק הטרנספורמציה של ϕ,

$$\begin{aligned}\bar{\phi} &= \delta^\rho{}_\nu a^\nu b_\rho \\ &= a^\rho b_\rho = \phi\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בהגדרה המקורית של $\phi = a^\mu b_\mu$. לפיכך, $\bar{\phi} = \phi$, כלומר ϕ הוא סקלר. גילינו שניתן לבנות משני וקטורים סקלר, על ידי ביצוע הסכימה $a^\mu b_\mu$, שנקראת "לכווץ" את האינדקס μ. תכונה זו, שמאפשרת לבנות באופן מסודר עצמים שחוק הטרנספורמציה שלהם ידוע, היא הסיבה לפיתוח הפורמליזם של טנזורים.

2.1.2 טנזורים מדרגה גבוהה יותר

בעיקבות מה שלמדנו על וקטורים, ניתן להכליל ולהגדיר עוד סוגים של גדלים שמתחלפים באופן מוגדר היטב בין מערכת x למערכת $\bar{x}$. למשל, נניח כי יש לנו N^2 מספרים $\theta^{\mu\nu}$ שמתחלפים לפי החוק

$$\bar{\theta}^{\mu\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\sigma}\theta^{\rho\sigma} \tag{2.4}$$

כלומר, כל אינדקס גורר איתו איבר של טרנספורמציה של וקטור, $\partial \bar{x}^\alpha / \partial x^\beta$. עצם $\theta^{\mu\nu}$ שכזה נקרא טנסור קונטרה-ואריאנטי מדרגה שנייה. ניתן בקלות להכליל זאת לסוגים

אחרים של טנזורים. טנזור קובריאנטי מדרגה שנייה הוא סט של גדלים $\chi_{\mu\nu}$ שמתחלף בצורה הבאה:

$$\bar{\chi}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu}\chi_{\rho\sigma} \tag{2.5}$$

באופן דומה, טנזור "מעורב" מדרגה שנייה $F^\mu{}_\nu$ מוגדר לפי חוק הטרנספורמציה הבא:

$$\bar{F}^\mu{}_\nu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu}F^\rho{}_\sigma \tag{2.6}$$

טנסור מדרגה שלישית הוא למשל סט של מספרים $G^{\mu\nu\rho}$ שמתחלפים לפי

$$\bar{G}^{\mu\nu\rho} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\gamma}G^{\alpha\beta\gamma}$$

וכן הלאה וכן הלאה.

לפי ההגדרות האלה, אם כן, וקטור הוא טנסור מדרגה ראשונה, וסקלר הוא טנסור מדרגה 0. ה"דרגה" היא מספר האינדקסים. מהדיון בסוף חלק 2.1.1, ברור כי ניתן לייצר טנסורים חדשים מטנסורים קיימים. למשל:

$$b^\mu = \phi a^\mu$$

כאשר ϕ סקלר ו-a^μ הוא וקטור קונרה-וריאנטי. הטרנספורמציה שלו היא

$$\bar{b}^\mu = \bar{\phi}\bar{a}^\mu = \phi\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}a^\nu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}b^\nu$$

רואים כי:

- b^μ הוא וקטור.
- אם משוואה מסויימת מתקיימת בין טנזורים, למשל $b^\mu = \phi a^\mu$, אזי באופן או- טומטי היא תתקיים במערכת אחרת, כלומר $\bar{b}^\mu = \bar{\phi}\bar{a}^\mu$.

זו עוד סיבה לחשיבות של הפורמליזם של טנזורים: שוויון בין טנזורים מאותו סוג שמתקיים במערכת אחת, מתקיים באופן אוטומטי במערכת השנייה, במילים אחרות שוויון בין טנזורים הוא <u>הצהרה אינווריאנטית</u>.

דוגמאות נוספות ליצירת טנזורים מתוך טנזורים קיימים הן:

1. $\theta^{\mu\nu} = a^\mu b^\nu$
2. $c_\mu = a_\mu \theta^{\mu\nu}$
3. $\phi = \theta^{\mu\nu}\chi_{\mu\nu}$

ניתן כמובן להמשיך בלי סוף.

<u>הערה חשובה</u>: לא <u>כל</u> סמל עם אינדקסים הוא טנזור. לדוגמא, נניח שנגדיר את $G^\mu{}_\nu$ כך,

$$G^\mu{}_\nu \equiv \frac{a^\mu}{b^\nu}$$

כאשר נתון כי a^μ, b^μ הם וקטורים. אזי במערכת $\bar{x}$ הוא יהיה

$$\bar{G}^\mu{}_\nu = \frac{\bar{a}^\mu}{\bar{b}^\nu} = \frac{\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\rho}a^\rho}{\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\sigma}b^\sigma}$$

וזה ממש לא חוק הטרנספורמציה של טנזור מעורב מדרגה שנייה, משוואה (2.6).

2.1.3 טנסורים מיוחדים

ישנם כמה טנזורים עם תכונות מענייניות. בחלק זה נציג אותם.

2.1.3.1 הטנזור של קרונקר

נניח כי במערכת x הטנזור המעורב ${\theta^\mu}_\nu$ נתון ע"י

$$ {\theta^\mu}_\nu = {\delta^\mu}_\nu $$

אזי במערכת $\bar{x}$ רכיבי הטנזור המתאים, ${\bar{\theta}^\mu}_\nu$ יהיו

$$ \begin{aligned} {\bar{\theta}^\mu}_\nu &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu}{\theta^\rho}_\sigma \\ &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\sigma}{\partial \bar{x}^\nu}{\delta^\rho}_\sigma \\ &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\rho}\frac{\partial x^\rho}{\partial \bar{x}^\nu} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial \bar{x}^\nu} \\ &= {\delta^\mu}_\nu \end{aligned} $$

כלומר גם ${\bar{\theta}^\mu}_\nu = {\delta^\mu}_\nu$. לפיכך הסמל ${\delta^\mu}_\nu$ עצמו הוא טנזור מעורב מדרגה שנייה, ויש לו את התכונה המופלאה שהרכיבים שלו זהים בכל המערכות.

2.1.3.2 הסמל האנטיסימטרי

הסמל האנטיסימטרי מוגדר ע"י

$$ \epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_N} = \begin{cases} 1 & \mu_1\mu_2\ldots\mu_N \text{ is an even permutation of } 1,2,\ldots,N \\ -1 & \mu_1\mu_2\ldots\mu_N \text{ is an odd permutation of } 1,2,\ldots,N \\ 0 & \text{any two of the indices are equal} \end{cases} $$

כדי להיות קונקרטיים, הבה נתרכז בארבעה מימדים, ונניח שאנו ממספרים את הקואור-דינטות שלנו x^0, x^1, x^2, x^3, כלומר האינדקסים $\mu, \nu, \ldots$ רצים על $0, 1, 2, 3$. אם כך, נגדיר מחדש את הסמל האנטיסמיטרי כך

$$ \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1 & \mu\nu\rho\sigma \text{ is an even permutation of } 0123 \\ -1 & \mu\nu\rho\sigma \text{ is an odd permutation of } 0123 \\ 0 & \text{any two of the indices are equal} \end{cases} $$

כדאי לזכור כי מתוך הגדרה זו

$$ \epsilon^{0123} = 1 $$

וכמו כן ϵ מחליף סימן כאשר מחליפים את הסדר בין שני אינדקסים, למשל

$$ \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon^{\beta\alpha\gamma\delta} \tag{2.7} $$

הבה נראה מה קורה כאשר מציבים את $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ לתוך חוק הטרנספורמציה של טנזור מדרגה 4:

$$\bar{E}^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{2.8}$$

חשוב להדגיש כי בשלב זה עדיין אין לנו מושג מהו $\bar{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$, והוא לא בהכרח טנזור. כדי להבין מהו $\bar{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$, הבה נציב $\mu\nu\rho\sigma = 0123$:

$$\begin{aligned}\bar{E}^{0123} &= \frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^\beta}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &\equiv \det\Theta\end{aligned}$$

כאשר הגדרנו את המטריצה Θ:

$$\Theta^\mu{}_\nu = \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \tag{2.9}$$

עבור ערך אחר של $\mu\nu\rho\sigma$, למשל $\bar{E}^{1023}$, אפשר לקבל מתוך (2.8)

$$\begin{aligned}\bar{E}^{1023} &= \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\beta}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^\beta}\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^\delta}\epsilon^{\beta\alpha\gamma\delta}\end{aligned}$$

במעבר מהשורה הראשונה לשנייה, החלפנו את השמות של α,β. מאחר שכזכור, אין משמעות לשם של אינדקס שסוכמים עליו, המעבר לשורה השנייה הוא למעשה טרי-ביאלי. נמשיך, תוך כדי הסתמכות על (2.7),

$$\begin{aligned}\bar{E}^{1023} &= -\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^\beta}\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\frac{\partial \bar{x}^0}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^1}{\partial x^\beta}\frac{\partial \bar{x}^2}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^3}{\partial x^\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= -\bar{E}^{0123}\end{aligned}$$

כלומר גם $\bar{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ מחליף סימן תחת החלפת שני אינדקסים; ברור אם כן כי גם $\bar{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ מתאפס כאשר שני אינדקסים שווים. ולפיכך

$$\bar{E}^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}E^{0123}$$

משום שכל ההבדל בין האיברים של $\bar{E}^{\mu\nu\rho\sigma}$ שלא מתאפסים הוא הסימן, בהתאם לזוגיות הפרמוטציה $\mu\nu\rho\sigma$. כלומר,

$$\bar{E}^{\mu\nu\rho\sigma} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\det\Theta \tag{2.10}$$

למעשה מצאנו את חוק הטרנספורמציה של $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$: הוא עובר טרנספורמציה כמו טנזור מדרגה 4, למעט פקטור של $\det\Theta$, כאשר Θ נקבעת ע"י הטרנספורמציה לפי (2.9). באופן כללי, גדלים שעוברים טרנספורמציה כמו טנזור, אבל נכפלים בפקטור מהצורה $(\det\Theta)^W$ נקראים "צפיפויות טנזוריות עם משקל W". לפיכך $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ הוא

צפיפות טנזורית עם משקל 1. במקרה הפרטי של וקטור, או סקלר, נשתמש בשם "צפיפות וקטורית" או "צפיפות סקלרית".

צפיפות וקטורית A^μ עם משקל 2 למשל, תעבור טרנספורמציה כך

$$\bar{A}^\mu = (\det\Theta)^2 \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu$$

2.1.3.3 כאשר $\det\Theta = 1$ הסמל האנטיסימטרי הוא טנזור

מתוך משוואה (2.10) אנו יכולים להסיק, שאם נגביל את הדיון שלנו לטרנספורמציות עם $\det\Theta = 1$, נקבל כי במקרה זה

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}^{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial \bar{x}^\rho}{\partial x^\gamma}\frac{\partial \bar{x}^\sigma}{\partial x^\delta}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\det\Theta \\ &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\end{aligned}$$

בדיוק מאותם טיעונים שהבאנו קודם לכן. לפיכך $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ הוא טנזור, ולא זאת בלבד, אלא שהרכיבים שלו שווים בכל מערכות הקואורדינטות.

2.1.4 הסמל האנטיסימטרי בשלושה מימדים

הסמל $\epsilon_{ijk} \equiv \epsilon^{0ijk}$ בד"כ מוגדר בהקשר של מטריקה אוקלידית, כלומר לא מקפידים על אינדקסים עליונים ותחתונים, אלא מקפידים על הערכים הנומריים בלבד:

$$\begin{aligned}&\epsilon_{123} = 1 \quad \text{and all cyclic permutations} \\ &\epsilon_{132} = -1 \quad \text{and all cyclic permutations}\end{aligned}$$

והוא מתאפס כאשר שני אינקסים שווים, מחליף סימן כאשר מחליפים שני אינדקסים, וסימטרי לפרמוטציות ציקליות (תכונה זו לא קיימת ב-4 מימדים!)

הסמל האנטיסימטרי ϵ_{ijk} משמש להצגת המכפלה הווקטורית,

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} \leftrightarrow C_i = \epsilon_{ijk}A_jB_k \tag{2.11}$$

כמו כן כל מטריצה 3×3 אנטיסימטרית ניתן לכתוב בעזרת שלושה פרמטרים α_k כך

$$A_{ij} = \epsilon_{ijk}\alpha_k$$

כמו כן הוא מקיים את הזהות

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \tag{2.12}$$

כדאי לעיין בהוכחה של הנוסחא הנ"ל: עבור k מסויים באגף שמאל, כדי ש-ϵ_{lmk} לא יתאפס, מתחייב $l \neq m$ ושניהם שונים מ-k. אותו הדבר אמור ב-i, j. כמו כן, מאחר ש-i, j, l, m נתונים, ישנו רק k אחד מתוך $k = 1, 2, 3$ שעבורו תנאי זה יכול להתקיים.

יוצא מכך ש-i,j ו-l,m הם אותם מספרים, אך יתכן כי $(i,j)=(l,m)$ ויתכן כי $(i,j)=(m,l)$. במקרה הראשון $\epsilon_{ijk}=\epsilon_{lmk}$ ולכן מכפלתם תהיה 1, זה מתאים למחובר הראשון באגף ימין של (2.12). במקרה השני $\epsilon_{ijk}=-\epsilon_{lmk}$ ומכפתם תהיה 1-, זה מתאים למחובר השני. שני המקרים לא יכולים להתרחש בבת אחת, ולכן תמיד אחד המחוברים יהיה אפס, והשני יהיה 1 או 1-.

כמו כן טריביאלי לבדוק ע"י הצבה שעבור $i=j$ או $l=m$ שני האגפים מתאפסים.

2.1.5 הטנסור המטרי

עד עכשיו עסקנו במרחבים N מימדיים, אך לא התייחסנו לשאלה של המרחק בין שתי נקודות במרחב. תפקידו של הטנזור המטרי הוא בדיוק לענות על השאלה, מה המרחק מהנקודה x^μ לנקודה $x^\mu+dx^\mu$? במרחב אוקלידי התשובה היא, לפי משפט פיתגורס,

$$ds^2=\sum_\mu (dx^\mu)^2$$

ניתן לכתוב זאת כך:

$$ds^2=g^E_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

כאשר

$$g^E_{\mu\nu}=\begin{cases}1 & \mu=\nu\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

$g^E_{\mu\nu}$ נקראת "המטריקה האוקלידית." באופן כללי, אם יש מטריקה אחרת $g_{\mu\nu}$ אזי המרחב הוא לא-אוקלידי. אם המטריקה תלויה במקום $g_{\mu\nu}(x)$, אזי המרחב <u>עקום</u>. אם ה - $g_{\mu\nu}$ הם קבועים, אזי המרחב <u>שטוח</u>.

עכשיו, מתוך הרעיון של "מרחק", ברור שהוא צריך להיות אינווריאנטי, כלומר זהה, בכל מערכת קואורדינטות. כדי שזה יתקיים, על המטריקה להיות טנזור, משום שאז, מאחר ש-dx^μ הוא וקטור, הגודל

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{2.13}$$

יהיה באופן אוטומטי סקלר. מאחר ש-$g_{\mu\nu}$ מוגדר למעשה כדי לשרת את המושג "מרחק", כפי שהוא רשום במשוואה (2.13), ברור כי $g_{\mu\nu}=g_{\nu\mu}$, כלומר הוא סימטרי. אם היה לו חלק אנטיסימטרי, הוא לא היה תורם למרחק (בגלל הסימטרייה של $dx^\mu dx^\nu=dx^\nu dx^\mu$), ולכן אנו לא מגבילים את עצמנו.

העובדה ש-$g_{\mu\nu}$ הוא טנזור פירושה

$$\bar{g}_{\mu\nu}=\frac{\partial x^\rho}{\partial\bar{x}^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial\bar{x}^\nu}g_{\rho\sigma}$$

2.1.5.1 הטנזור המטרי הקונטרה-וריאנטי

למעשה אנו עכשיו יודעים שבכל הנסיבות, מלווים אותנו שלושה גדלים:

1. הטנזור של קרונקר $\delta^{\mu}{}_{\nu}$.
2. הצפיפות הטנזורית $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.
3. הטנזור המטרי $g_{\mu\nu}$.

הבה נתייחס לרגע ל-$g_{\mu\nu}$ כאל מטריצה. מאחר שהיא סימטרית, היא ניתנת ללכסון, כלומר ישנה מערכת קואורדינטות שבה $g_{\mu\nu}$ היא מהצורה (לשם קונקרטיות נחזור שוב ל-4 מימדים)

$$\mathbf{g}=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & & \\ & \lambda_1 & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \lambda_3\end{pmatrix}$$

כאשר ה-λ_{μ} הם הערכים העצמיים. במערכת קואורדינטות זו המרחק בין שתי נקודות הנבדלות הבדל אינפיניטיזימלי בקואורדינטות שלהן dx^{μ} יהיה

$$ds^2=\sum_{\mu}\lambda_{\mu}(dx^{\mu})^2$$

נניח כי אחד הערכים העצמיים, למשל λ_1 היה אפס. מאחר ש-dx^{μ} שרירותי, היה נובע מזה שהמרחק בין שתי נקודות שעבורן כל ה-dx^{μ} חוץ מ-dx^1 מתאפסים הוא

$$ds^2=\lambda_1(dx^1)^2=0$$

כי $\lambda_1=0$. אבל מתוך הרעיון של "מרחק", יוצא שאם המרחק בין שתי הנקודות האלה הוא אפס, הן צריכות להיות אותה נקודה. אבל הן אינה אותה נקודה, כי הקואורדינטות שלהן שונות. הדרך היחידה להימנע מהסתירה הזו היא לדרוש כי

$$\lambda_{\mu}>0$$

תמיד (הסיבה לסימן החיובי היא ש-ds^2 צריך להיות חיובי). לפיכך אנו יכולים להסיק מיד שהמטריקה הפיכה, מכיוון שבמערכת שבה היא מלוכסנת המטריצה ההופכית שלה היא

$$\mathbf{g}^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda_0^{-1} & & & \\ & \lambda_1^{-1} & & \\ & & \lambda_2^{-1} & \\ & & & \lambda_3^{-1}\end{pmatrix}$$

ומוגדרת היטב. כמו כן ברור כי המכפלה $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{g}=\mathbf{1}$, וזהה בכל המערכות, כלומר היא <u>סקלר</u>. מאחר שמדובר במכפלה של שני טנזורים מדרגה שנייה, הרי שבשביל

שהמכפלה תהיה סקלר ואחד מהם הוא קובריאנטי (המטריקה $g_{\mu\nu}$), השני צריך להיות קונטרהוריאנטי. כלומר ברכיבים, המכפלה $\mathbf{g}^{-1}\mathbf{g} = \mathbf{1}$ ברכיבים היא

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}{}_{\nu}$$

כאשר $g^{\mu\nu}$ הוא "המטריקה הקובריאנטית", שרכיביו מתקבלים באופן עקרוני על ידי הפיכת המטריצה $g_{\mu\nu}$.

2.1.5.2 העלאה והורדה של אינדקסים

מכיוון שהמטריקה היא טנזור, נובע כי - $g_{\mu\nu}dx^{\nu}$ הוא וקטור קו-וריאנטי. אנו נסמן אותו כך

$$dx_{\mu} = g_{\mu\nu} dx^{\nu}$$

אנו יכולים <u>להוריד אינדקסים</u> באופן דומה לכל טנזור:

$$A_{\mu} = g_{\mu\nu} A^{\mu} \tag{2.14}$$

$$T^{\mu}{}_{\nu} = g_{\nu\rho} T^{\mu\rho} \tag{2.15}$$

איך מעלים אותם חזרה ? מאחר ש-

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$$

ניתן עכשיו גם <u>להעלות אינדקסים:</u>

$$A^{\mu} = g^{\mu\nu} A_{\nu} \tag{2.16}$$

$$T^{\mu\nu} = g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} T_{\rho\sigma} \tag{2.17}$$

ומכיוון ש-$g_{\mu\nu}$ ו-$g^{\mu\nu}$ הופכיים זה לזה, מובטח לנו ש-A^{μ} ממשוואה (2.14) הוא אותו A^{μ} ממשוואה (2.16), כלומר ההעלאה וההורדה של אינדקסים היא עיקבית.

2.1.5.3 הדיטרמיננט של המטריקה[2]

אנו נעסוק עכשיו בצפיפות טנזורית חשובה, g, שמוגדרת להיות הדיטרמיננט של המטריקה

$$g = \det \mathbf{g}$$

כאשר $\mathbf{g}$ היא מטריצה שרכיביה הם $g_{\mu\nu}$. כדי לראות שזו צפיפות טנזורית, נצא מחוק הטרנספורמציה של $g_{\mu\nu}$:

$$\begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu} &= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\mu}} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \bar{x}^{\nu}} g_{\rho\sigma} \\ &= \frac{\partial x^{\rho}}{\partial \bar{x}^{\mu}} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial \bar{x}^{\nu}} \end{aligned}$$

[2] חלק זה לא קריטי ליחסות פרטית, וניתן לדלג עליו בקריאה ראשונה. הוא מובא כאן בשביל השלמות.

מתוך הגדרתה של Θ, משוואה (2.9), ניתן לרשום זאת כמשוואה מטריצית

$$\bar{\mathbf{g}} = \Theta \mathbf{g} \Theta$$

ניתן לקבל מייד כי

$$\bar{g} = (\det \Theta)^2 g$$

כלומר g הוא צפיפות סקלרית עם משקל 2. מזה נובע שניתן להגדיר את

$$e^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$$

והוא יהיה טנזור, משום ש-

$$\begin{aligned}
\bar{e}^{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \bar{E}^{\mu\nu\rho\sigma} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(\det \Theta)^2 g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \det \Theta \\
&= \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = e^{\mu\nu\rho\sigma}
\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו ב-(2.10). למעשה כל צפיפות טנזורית ניתן לרשום כטנזור כפול פקטורים מתאימים של $\sqrt{g}$.

2.2 טרנספורמצית לורנץ

אנו עוברים עכשיו לעסוק בקבוצה של טרנספורמציות הנקראות "טרנספורמציות לורנץ", המהוות את הבסיס של תורת היחסות הפרטית[3]. כתזכורת, נזכיר את שתי ההנחות של תורת היחסות הפרטית:

1. חוקי הפיזיקה זהים בכל המערכות האינירציאליות.
2. מהירות האור c זהה בכל המערכות האלה.

2.2.1 הטרנספורמציה הפשוטה ביותר

נניח שמערכת x' נעה במהירות $\mathbf{v} = \beta c \hat{\mathbf{z}}$ ביחס למערכת x, וכמו כן המערכת מתלכדות ברגע $t = t' = 0$. אזי טרנספורמצית לורנץ בכיוון z במהירות $\beta c = v$:

$$\begin{aligned}
z' &= \gamma(z - \beta ct) \\
ct' &= \gamma(ct - \beta z) \\
\Rightarrow t' &= \gamma\left(t - \frac{\beta z}{c}\right) \\
x' &= x \\
y' &= y
\end{aligned}$$

[3] אנו מסתמכים על כך שהקורא כבר למד על תורת היחסות הפרטית במסגרת אלמנטרית יותר, ועוסקים כאן בפיתוח הפורמליזם הטנזורי, ולא בפיתוח של הכל מעקרונות ראשוניים. ניתן למצוא פיתוח כזה ב-1.

כדי לקבל את טרנספורמציה בכיוון אחר, כל שיש לעשות זה להחליף את z בכיוון המתאים. ניתן לכתוב את הטרנספורמציה כך, כאשר $(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$:

$$\begin{bmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

טרנספורמציה כזו נקראת "boost" בכיוון z. בכתיב קומפקטי: $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ ניתן לרשום אותה כך,

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$$

מאחר שה-$\Lambda^\mu{}_\nu$ הם קבועים, ברור כי

$$dx'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu dx^\nu$$

כלומר חוק הטרנספורמציה של וקטור קונטרה-וריאנטי של טרנספורמצית לורנץ הוא

$$a'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu$$

הערה: כאשר רוצים להציג את $\Lambda^\mu{}_\nu$ כמטריצה, לוקחים את האינדקס הראשון של Λ (במקרה זה μ) להיות השורה והשני הוא העמודה, בלי קשר לאם הוא למעלה או למטה.

חוק הטרנספורמציה של טנזור מדרגה שנייה של טרנספורמצית לורנץ הוא

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma T^{\rho\sigma}$$

טרנספורמצית ה-boost היא זו שנלמדת בקורס ראשון על יחסות פרטית, ומייצגת את המעבר בין שתי מערכת צירים המכוונות כך שכל הצירים שלהן מקבילים (x, x' הם באותו כיוון וכו'), והן נעות זו ביחס לזו בכיוון z. ברור כי ניתן לדון בשאלת הטר-נספורמציה בין מערכות שמסובבות בכיוונים שונים, ושנעות זו ביחס לזו בכיוון כללי כלשהו. החלק הבא עוסק בשאלה הזו.

2.2.2 ההגדרה הכללית של טרנספורמצית לורנץ

טרנספורמציות לורנץ בנויות כך שהן שומרות על מהירות אור קבועה. אם אור זז בזמן dt העתק $d\mathbf{r}$, במערכת אחרת הוא זז בזמן dt' העתק $d\mathbf{r}'$. עכשיו:

$$c = \frac{|d\mathbf{r}'|}{dt'} = \frac{|d\mathbf{r}|}{dt} = c$$

כלומר

$$c^2dt^2 - d\mathbf{r}^2 = c^2dt'^2 - d\mathbf{r}'^2$$

את התבנית הריבועית הזאת ניתן להציג כ-

$$c^2dt^2 - d\mathbf{r}^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

כאשר הצגנו את "המטריקה של מינקובסקי"[4]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

(המטריקה $g^{\mu\nu}$ קיימת, ובאופן נומרי מתקיים $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$, כלומר המטריצה שלה זהה). יוצא לנו שאם $g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ זהה בכל המערכות אזי מהירות האור תהיה זהה. כלומר

$$g_{\mu\nu}dx'^\mu dx'^\nu = g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho dx^\rho \Lambda^\nu{}_\sigma dx^\sigma = g_{\rho\sigma}dx^\rho dx^\sigma$$

כלומר:

$$g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{2.20}$$

זה התנאי שמגדיר באופן כללי טרנספורמצית לורנץ. מספרים $\Lambda^\mu{}_\nu$ המקיימים את (2.20) יתנו לנו טרנספורמציות ששומרות על מהירות אור קבועה[5].

לפני שנמשיך נשים לב שמאחר שיש לנו מטריקה, ניתן עכשיו להעלות ולהוריד אינדקסים. כמו כן נציג את הקונבנציה שאינדקסים יווניים (כגון μ, ν, σ) מקבלים את הערכים $0, 1, 2, 3$, ואילו אינדקסים לטיניים (כגון i, j, k) מקבלים את הערכים $1, 2, 3$ בלבד. אם יש לנו וקטור קונטרה-וריאנטי אזי ניתן להציג אותו כך:

$$\begin{aligned} A^\mu &= (A^0, A^1, A^2, A^3) \\ &\equiv (A^0, \mathbf{A}) \end{aligned}$$

כאשר הפרדנו את A^0, "רכיב הזמן" של הוקטור, מרכיבי המרחב שלו A^i, שלעיתים מסומנים כוקטור תלת מימדי $\mathbf{A}$. הורדת אינדקס מתאפשרת באמצעות המטריקה,

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu$$

המקרים הפרטיים הם:

$$\begin{aligned} A_0 &= g_{00}A^0 = A^0 \\ A_i &= g_{ii}A^i = -A^i \qquad \text{no sum on } i \end{aligned}$$

[4] מאחר שלא כל הערכים העצמיים חיוביים, זו אינה "מטריקה" במובן של מדידת מרחקים. מאחר שהיא הפיכה, אין בעיה להגדיר את $g^{\mu\nu}$.

[5] בעצם, גם Λ שמקיימות $g_{\mu\nu}\Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = \lambda g_{\rho\sigma}$ כאשר λ מספר שומרות על מהירות אור קבועה. אלא ש-λ מייצג פשוט שינוי בסקלת מדידת האורך/זמן. אנו נניח שכל הצופים שלנו משתמשים באותן יחידות, ולכן $\lambda = 1$.

כך שהוקטור הקובריאנטי המתאים ל-$A^\mu = (A^0, \mathbf{A})$ הוא

$$A_\mu = (A^0, -\mathbf{A})$$

כמו כן, המכפלה של שני וקטורים עם רכיבים קונטרה-וריאנטיים $A^\mu = (A^0, \mathbf{A}), B^\mu = (B^0, \mathbf{B})$ היא

$$\begin{aligned} A^\mu B_\mu &= A^0 B_0 + A^i B_i \\ &= A^0 B^0 - A^i B^i \\ &= A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

2.2.3 טנזורים ומטריצות - מתכון לצרות

כפי שראינו, הדבר שמגדיר טרנספורמציית לורנץ הוא התנאי (2.20), שמשוכתב כאן

$$g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{2.21}$$

כאשר $g_{\mu\nu}$ נתונה בנוסחא (2.19). אם נגדיר את המטריצה $\mathbf{\Lambda}$ כך שבשורה ה-μ, בעמודה ה-ν שלה נמצא $\Lambda^\mu{}_\nu$, ונגדיר את $\boldsymbol{g}$ כמטריצה שהאלמנטים שלה הם $g_{\mu\nu}$, ניתן לרשום את (2.21) בצורה מטריצית

$$\boldsymbol{g}_{\mu\nu} \mathbf{\Lambda}_{\mu\rho} \mathbf{\Lambda}_{\nu\sigma} = \boldsymbol{g}_{\rho\sigma}$$

חשוב לשים לב ש"זנחנו" את האופי של האינדקסים, קונטרה- או קו-ווריאנטיים. הסיבה היא, כפי שנראה בהמשך, שעולם הטנזורים ועולם המטריצות הם לא אותו עולם. לעת עתה נמשיך בפיתוח של המשוואה המטריצית,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda}_{\nu\sigma} \boldsymbol{g}_{\mu\nu} \mathbf{\Lambda}_{\mu\rho} &= \boldsymbol{g}_{\rho\sigma} \\ \mathbf{\Lambda^T}{}_{\sigma\nu} \boldsymbol{g}_{\nu\mu} \mathbf{\Lambda}_{\mu\rho} &= \boldsymbol{g}_{\rho\sigma} \end{aligned}$$

כאשר $\mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}$ היא המטריצה המשוחלפת (transposed) שמתאימה למטריצה $\mathbf{\Lambda}$, והשתמשנו ב-$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. במשוואה האחרונה האינדקסים מאורגנים בסדר הנכון כדי להפוך אותה למשוואה של כפל מטריצות:

$$\mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{g} \mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{g} \tag{2.22}$$

ניתן להסיק ממשוואה זו, על ידי לקיחת הדיטרמיננט של שני הצדדים, את התכונה

$$\begin{aligned} (\det \mathbf{\Lambda})^2 &= 1 \\ \det \mathbf{\Lambda} &= \pm 1 \end{aligned} \tag{2.23}$$

אנו ניקח בד"כ את הסט של המטריצות עם $\det \mathbf{\Lambda} = 1$, ולפיכך $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ הוא <u>טנזור של טרנספורמצית לורנץ</u>. המטריצות עם $\det \mathbf{\Lambda} = -1$ מייצגות טרנספורמציות של שיקופים מרחביים והיפוך זמן, ומהוות סיפור בפני עצמן.

פעמים רבות רושמים משהו כגון

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = (\Lambda^T)_{\nu}{}^{\mu} \tag{2.24}$$

במקרה כזה טבעי לרשום גם

$$(\Lambda^T)^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} \tag{2.25}$$

מצד שני,

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mu}{}_{\nu} &= g^{\mu\alpha}\Lambda_{\alpha}{}^{\beta}g_{\beta\nu} \\ &= g^{\mu\alpha}(\Lambda^T)^{\beta}{}_{\alpha}g_{\beta\nu} \\ &= g_{\nu\beta}(\Lambda^T)^{\beta}{}_{\alpha}g^{\alpha\mu}\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בסימטרייה של המטריקה. המשוואה המטריצית המתאימה היא (שימו לב שהסדר של μ, ν הפוך בין שני האגפים, ולכן יש שחלוף על כל אגף ימין)

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}_{\mu u} &= \left[\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}\right]_{\nu\mu} \\ \boldsymbol{\Lambda} &= \left(\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}\right)^T \\ \boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{T}} &= \boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}\end{aligned}$$

אבל, אם נצא ממשוואה (2.22), תוך שימוש בעובדה ש-$\boldsymbol{gg} = \mathbf{1}$, נקבל

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda} &= \boldsymbol{g} \\ \boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda} &= \mathbf{1} \\ \boldsymbol{g}\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g} &= \boldsymbol{\Lambda}^{-\mathbf{1}}\end{aligned}$$

לפיכך מתחייב משתי התוצאות שלנו כי

$$\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{\Lambda}^{-\mathbf{1}}$$

האם זה נכון? עבור המטריצה מנוסחא (2.18) לפחות, זה <u>לא נכון</u>. מה קרה פה? העניין הוא ששתי צורות הנוטציה, של טנזורים ושל מטריצות, לא עקביות באופן כללי, כי יש מטריצות שונות לגרסאות שונות של אותו טנזור, $T^{\mu\nu}, T^{\mu}{}_{\nu}, T_{\mu}{}^{\nu}$.

על אף זאת, טנזור מדרגה שנייה הוא אכן מטריצה (סידור מלבני של מספרים), וניתן לקחת את הדיטרמיננט שלו וכולי, כל עוד נזהרים, כפי שעשינו בפיתוח של (2.22) ו-(2.23). יש להגדיר מטריצה <u>אחת</u>, עבור גרסה <u>ספציפית</u> של הטנזור, ולעבוד ביחס אליה כל הזמן. מה שקרה לנו הוא בעצם שהמשוואות (2.24) ו-(2.25) לא עיקביות זו עם זו.

2.2.4 חוק הטרנספורמציה הקובריאנטי

נתחיל מחוק הטרנספורמציה הקובריאנטי,

$$d\bar{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}dx^{\nu}$$

הווקטור הקובריאנטי הוא אם כך

$$\begin{aligned} d\bar{x}_\sigma &= g_{\sigma\mu} d\bar{x}^\mu = g_{\sigma\mu} \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ &= g_{\sigma\mu} \Lambda^\mu{}_\nu g^{\nu\rho} x_\rho \\ &= \Lambda_\sigma{}^\rho x_\rho = \Lambda_\sigma{}^\nu x_\nu \end{aligned}$$

מהתיאוריה הכללית של טנזורים אנו יודעים כי המטריצה שמופיעה בחוק הטרנס-פורמציה הקובריאנטי היא

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma}$$

ולכן

$$\Lambda_\sigma{}^\nu \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma}$$

כמו כן אנו יודעים מחוק הטרנספורמציה הקונטרה-וריאנטי

$$\Lambda^\mu{}_\nu \equiv \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu}$$

וברור כי

$$\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial \bar{x}^\sigma} = \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\sigma{}^\nu = \delta^\mu{}_\sigma$$

כלומר, $\Lambda_\sigma{}^\nu$ הם האלמנטים של המטריצה ההופכית לזו של $\Lambda^\mu{}_\nu$:

$$\Lambda_\sigma{}^\nu = (\mathbf{\Lambda^{-1}})^\nu{}_\sigma$$

כדי לוודא זאת, נציב:

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\sigma{}^\nu &= \Lambda^\mu{}_\nu (\mathbf{\Lambda^{-1}})^\nu{}_\sigma \\ &= \delta^\mu{}_\sigma \end{aligned}$$

לפי הגדרה. לפיכך חוק הטרנספורמציה הקו-וריאנטי הוא

$$\bar{x}_\sigma = (\mathbf{\Lambda^{-1}})^\nu{}_\sigma x_\nu \tag{2.26}$$

כרגיל, כאשר מערבבים טנזורים ומטריצות יש להיזהר, ולכן יש לציין ש-$\mathbf{\Lambda^{-1}}$ כאן היא המטריצה ההפוכה למטריצה $\mathbf{\Lambda}$, שבשורה μ ועמודה ν שלה (של $\mathbf{\Lambda}$) מופיע $\Lambda^\mu{}_\nu$.

2.3 התארכות הזמן, מהירות, תנע

נניח שחלקיק נע במהירות $\mathbf{v}$ העתק $d\mathbf{r}$ בזמן dt במערכת המעבדה. במערכת המנוחה הרגעית של החלקיק, $d\mathbf{r}' = 0$ והזמן שעובר הוא $d\tau$. במערכת זו $dx'^\mu dx'_\mu = c^2 d\tau^2$. מצד שני זה בהכרח סקלר, ולכן אנו יודעים כי:

$$dx'^\mu dx'_\mu = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - d\mathbf{r}^2 = (c^2 - \mathbf{v}^2) dt^2$$

לפיכך:

$$dt = \frac{d\tau}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \gamma(v)d\tau > d\tau \tag{2.27}$$

ובכן, הזמן $d\tau$ הוא הזמן העצמי של החלקיק (זמן שמודד שעון שנמצא על החלקיק), והוא סקלר $d\tau^2 = c^{-2}dx^\mu dx_\mu$, ותמיד קטן יותר מפרק הזמן המתאים במערכת המעבדה. אפקט זה נקרא "התארכות הזמן".

מסלול של חלקיק מתואר ע"י $\mathbf{r}(t)$ במערכת מסויימת, לפי הקשר בין t ל - τ ניתן לתאר את מסלול החלקיק בצורה קובריאנטית:

$$x^\mu = x^\mu(\tau)$$

ניתן למצוא קשר בין המהירות של חלקיק לטרנספורמצית לורנץ. נגדיר:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{2.28}$$

זה וקטור משום ש - dx^μ הוא וקטור ואילו $d\tau$ הוא סקלר. בכתיב תלת מימדי

$$u^\mu = (u^0, \mathbf{u}) = \left(\frac{dx^0}{d\tau}, \frac{dx^i}{d\tau}\right) = \left(c\frac{dt}{d\tau}, \frac{dx^i}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right) = \left(\gamma c, \gamma\frac{dx^i}{dt}\right) = (\gamma c, \gamma\mathbf{v})$$

כלומר

$$\mathbf{v} = \frac{c}{u^0}\mathbf{u}$$

שימו לב כי:

$$u^\mu u_\mu = c^2$$

וקטור התנע הוא:

$$p^\mu = m\frac{dx^\mu}{d\tau} \tag{2.29}$$

עכשיו:

$$p^0 = \gamma mc, \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$$

בגבול של מהירות נמוכה $\gamma \simeq 1 + \frac{v^2}{2c^2}$, ולפיכך

$$p^0 \simeq mc + \frac{mv^2}{2c} \Rightarrow p^0 c \simeq mc^2 + \frac{mv^2}{2}$$

ואילו $\mathbf{p} \simeq m\mathbf{v}$. בהכללה:

$$p^0 = \frac{E}{c}, \mathbf{p} = \gamma m\mathbf{v}$$

כלומר האנרגיה והתנע מתחלפים כמו ארבע-וקטור. עכשיו:

$$p^\mu p_\mu = E^2/c^2 - \mathbf{p}^2 = m^2c^2$$

שהוא כמובן סקלר. m היא המסה של החלקיק. (אין מסה שהיא לא מסת המנוחה). קיבלנו את הקשר

$$E^2 = \mathbf{p}^2c^2 + m^2c^4$$

2.4 הטרנספורמציה של המהירות

בניגוד למקום[6] x^μ, שהוא וקטור, המהירות $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, אינה וקטור של טרנספורמצית לורנץ. הדבר נובע מההגדרה של המהירות, שמערבת את מושגי המרחב והזמן שניהם, ולפיכך כדי למצוא את הדרך שבה המהירות משתנה בין מערכות ייחוס, יש להתחשב בשינוי של המרחב והזמן גם יחד. כדי לעשות זאת, נניח שחלקיק נע במהירות $\mathbf{v}$ במערכת המעבדה. אנו רוצים למצוא את המהירות שלו $\mathbf{v}'$ במערכת שנעה במהירות $V = \beta c$ בכיוון $\hat{\mathbf{z}}$ ביחס למערכת המעבדה. כאמור, $\mathbf{v}$ אינה וקטור, אבל $u^\mu = (\gamma c, \gamma \mathbf{v})$ הוא <u>כן</u> וקטור של לורנץ, ולכן חוק הטרנספורמציה שלו תחת boost שכזה ידוע:

$$u'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$$

במקרה של boost (השווה/י עם משוואה (2.18)) אנו מקבלים עבור רכיבים $0, 3$:

$$\begin{aligned} u'^3 &= \gamma(V)(u^3 - \beta u^0) \\ u'^0 &= \gamma(V)(u^0 - \beta u^3) \end{aligned}$$

נזכור כי

$$\begin{aligned} u^\mu &= (\gamma(v)c, \gamma(v)\mathbf{v}) \\ u'^\mu &= (\gamma(v')c, \gamma(v')\mathbf{v}') \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} \gamma(v')v'^3 &= \gamma(V)(\gamma(v)v^3 - \beta\gamma(v)c) \\ &= \gamma(V)\gamma(v)(v^3 - V) \qquad (2.30) \\ \gamma(v')c &= \gamma(V)(\gamma(v)c - \beta\gamma(v)v^3) \\ &= \gamma(V)\gamma(v)\left(c - \frac{Vv^3}{c}\right) \qquad (2.31) \end{aligned}$$

חילוק שתי המשוואות נותן

$$v'^3 = c\frac{v^3 - \beta c}{c - \beta v^3} = \frac{v^3 - V}{1 - Vv^3/c^2}$$

זה "חוק חיבור המהירויות" המפורסם, שבד"כ נכתב כך,

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV/c^2}$$

כאשר המהירויות כולן באותו כיוון. כמו כן קיבלנו "בונוס": ניתן לרשום את משוואה (2.31) כך:

$$\gamma(v') = \gamma(V)\gamma(v)\left(1 - \frac{Vv^3}{c^2}\right)$$

[6] אנו משתמשים כאן בהגדרה ארבע-מימדית של "מקום", שכוללת גם את הזמן.

או

$$\gamma_{12} = \gamma_1\gamma_2(1-\beta_1\beta_2) \tag{2.32}$$

כלומר אם פקטור ה"גאמא" של החלקיקים $1,2$ במעבדה הם γ_1,γ_2, אזי פקטור הגאמא של חלקיק 1 ביחס לחלקיק 2 הוא γ_{12} שנתון בנוסחא (2.32) (כאשר כל המהירויות באותו כיוון).

כמו כן, ה-boost בכיוון 3, הלא הוא כיוון z, משפיע על המהירויות גם בכיוונים 1,2:

$$\begin{aligned} u'^2 &= u^2 \\ \gamma(v')v'^2 &= \gamma(v)v^2 \\ v'^2 &= \frac{\gamma(v)}{\gamma(v')}v^2 = \frac{v^2}{\gamma(V)\left(1-\frac{Vv^3}{c^2}\right)} \end{aligned}$$

ובאופן דומה:

$$v'^1 = \frac{v^1}{\gamma(V)(1-Vv^3/c^2)}$$

בעזרת התכונות של u^μ הצלחנו לקבל את חוק חיבור המהירויות עבור $\mathbf{V}=V\hat{\mathbf{z}}$, בצורה קלה בהרבה מלהשתמש בהגדרות $\frac{dx'}{dt'}$ וכולי. ניתן להכליל את מה שקיבלנו ולרשום כי השינוי של המהירות תחת boost עם מהירות $\mathbf{V}$ הוא

$$\mathbf{v}'_\parallel = \frac{\mathbf{v}_\parallel - \mathbf{V}}{1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}/c^2} \tag{2.33}$$

$$\mathbf{v}'_\perp = \frac{\mathbf{v}_\perp}{\gamma(V)(1-\mathbf{v}\cdot\mathbf{V}/c^2)} \tag{2.34}$$

2.5 יחידות טבעיות

מקובל, כאשר עוסקים בתורת היחסות, לעבוד ביחידות "טבעיות", כלומר כאלה שבהן $c=1$. דוגמא לכך יכולה להיות מערכת יחידות שבה הזמן נמדד בשניות, והמרחק ב-"שניות אור", כלומר יחידת המרחק שווה לאותו מרחק שהאור עובר בשנייה אחת. לפיכך במערכת יחידות כזו

$$c = 1\frac{\text{light-second}}{\text{second}}$$

למעשה יחידת הזמן מגדירה את יחידת המרחק, כך שהיא מיותרת. לפיכך פשוט מציבים $c=1$. כתוצאה מכך מתפשטות הנוסחאות, למשל הארבע וקטור של המיקום x^μ הוא:

$$x^\mu = (t,\mathbf{r})$$

הארבע-וקטור של המהירות הוא

$$u^\mu = (\gamma,\gamma\mathbf{v})$$

הטרנספורמציה של ה-boost היא (הסמל β למעשה מיותר כי $\beta = V/c = V$),

$$x'^3 = \gamma(x^3 - vt)$$
$$t' = \gamma(t - vx^3)$$

הקשר בין זמן למרחב ברור הרבה יותר בצורה זו. התנע של החלקיק הוא

$$p^\mu = (E, \mathbf{p})$$

כאשר

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{v}$$
$$E = \gamma m$$

ולפיכך

$$\mathbf{p} = E\mathbf{v}$$

חוק חיבור המהירויות הוא

$$v' = \frac{v - V}{1 - vV}$$

ואחרון חביב

$$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}$$

ניתן כמובן לשחזר את הפקטורים של c. למשל, ניקח את הנוסחא $\mathbf{p} = E\mathbf{v}$, איך היא נראית כאשר רושמים פקטורים של c במפורש? ניקח ניחוש $\mathbf{p} = c^\alpha E\mathbf{v}$ ונשחק עם היחידות (אנו נסמן ב-$[\cdot]$ את "היחידה של", זאת אומרת $[m]$ היא "היחידה של המסה"):

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= c^x E\mathbf{v} \\
[m][v] &= [c]^x [E][v] \\
[m] &= [c]^x [E] \\
[c]^x &= \frac{[m]}{[E]} = \frac{[m]}{[mc^2]} \\
&= \frac{[m]}{[m][c^2]} = \frac{1}{[c]^2} \\
\Rightarrow x &= -2
\end{aligned}$$

כלומר הנוסחא היא

$$\mathbf{p} = \frac{E\mathbf{v}}{c^2}$$

דוגמא 2.1 שימור תנע

אנטי פרוטון בעל אנרגיה ϵ ומסה M מתנגש בפרוטון אשר נמצא במנוחה.

1. מצאו חסם עליון על המסה של של חלקיק שנוצר מחיסול הפרוטון והאנטי פרוטון.
2. האם יכול להווצר פוטון בודד ?

הפתרון:

1. דבר ראשון - יחידות טבעיות $c = 1$. ובכן, נחשוב על הניסוי במערכת מרכז המסה. החלקיק הכי כבד האפשרי יווצר במנוחה לאחר ההתנגשות במערכת זו. סה"כ התנע הוא אפס, ולפיכך ה 4 תנע לאחר יצירת החלקיק החדש הוא פשוט:

$$P_{CM} = (m, 0)$$

מצד שני, במערכת המעבדה לאנטי-פרוטון יש תנע $\mathbf{p}$

$$\begin{aligned} P_L &= (\epsilon, \mathbf{p}) + (M, 0) \\ &= (\epsilon + M, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

אבל $P^\mu P_\mu$ הוא סקלר ולכן:

$$\begin{aligned} m^2 &= P_L^\mu P_{L\mu} \\ &= (\epsilon + M)^2 - \mathbf{p}^2 \\ &= \epsilon^2 + 2\epsilon M + M^2 - \mathbf{p}^2 \\ &= 2(\epsilon M + M^2) \\ m &= \sqrt{2(\epsilon M + M^2)} \end{aligned}$$

2. עבור פוטון, במערכת CM יוצא שהתנע שלו חייב להיות אפס. לפיכך גם האנרגיה שלו היא אפס. אבל האנרגיה הקודמת היתה גדולה מאפס. לפיכך התהליך הוא לא אפשרי.

2.6 טרנספורמציות boost בכיוון שרירותי[7]

נוסחא (2.18) נותנת לנו את טרנספורמצית ה-boost בכיוון $\hat{\mathbf{z}}$. בחלק זה נפתח נוסחא לטרנפורמצית boost בכיוון כלשהו, עם מהירות $\mathbf{V} \equiv \beta c$, בין שתי מערכות צירים שציריהן מקבילים. במהירות β. את הפיתוח נעשה בשיטה של ניחושים מושכלים, ובסופו של דבר נבדוק את הפתרון שלנו.

נתחיל מהדרישה

$$g_{\rho\sigma} = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\rho \Lambda^\nu{}_\sigma \tag{2.35}$$

[7] הדיון כאן מטרתו להגיע לנוסחא (2.45), והוא לא מאוד מהותי. ניתן לדלג על הפיתוח לנוסחא הסופית בקריאה ראשונה.

נציב $\rho=\sigma=0$ ונקבל

$$\begin{aligned}1 &= g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0}\\ 1 &= g_{00}(\Lambda^{0}{}_{0})^2+\sum_i g_{ii}(\Lambda^{i}{}_{0})^2\\ 1 &= (\Lambda^{0}{}_{0})^2-\sum_i(\Lambda^{i}{}_{0})^2\end{aligned}$$

מאחר ש-$1=\gamma^2-\gamma^2\beta^2$, ולכן ניתן לנחש

$$\Lambda^{0}{}_{0}=\gamma,\Lambda^{i}{}_{0}=\gamma\beta^{i} \tag{2.36}$$

נותר לנו לברר אם כך את $\Lambda^{i}{}_{j}$. כדי לעשות זאת נציב $\rho=0,\sigma=i$ ב-(2.35),

$$\begin{aligned}0 &= g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{i}\\ 0 &= \Lambda^{0}{}_{0}\Lambda^{0}{}_{i}-\Lambda^{j}{}_{0}\Lambda^{j}{}_{i}\end{aligned}$$

נשתמש ב-(2.36),

$$\begin{aligned}\gamma\Lambda^{0}{}_{i}-\gamma\beta^{j}\Lambda^{j}{}_{i} &= 0\\ \Lambda^{0}{}_{i} &= \Lambda^{j}{}_{i}\beta^{j}\end{aligned} \tag{2.37}$$

עכשיו נציב $\rho=i,\sigma=j$ ב-(2.35),

$$\begin{aligned}-\delta_{ij} &= g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{i}\Lambda^{\nu}{}_{j}\\ -\delta_{ij} &= \Lambda^{0}{}_{i}\Lambda^{0}{}_{j}-\Lambda^{k}{}_{i}\Lambda^{k}{}_{j}\end{aligned}$$

עכשיו נציב את (2.37),

$$\begin{aligned}\Lambda^{n}{}_{i}\beta^{n}\Lambda^{\ell}{}_{j}\beta^{\ell}-\Lambda^{k}{}_{i}\Lambda^{k}{}_{j} &= -\delta_{ij}\\ \Lambda^{n}{}_{i}\Lambda^{\ell}{}_{j}\beta^{n}\beta^{\ell} &= \Lambda^{k}{}_{i}\Lambda^{k}{}_{j}-\delta_{ij}\end{aligned} \tag{2.38}$$

עכשיו, אנו יודעים כי $\lim_{\beta\to 0}\Lambda^{i}{}_{j}=\delta_{ij}$ ולכן ננחש

$$\Lambda^{q}{}_{p}=\delta_{qp}+\theta\beta^{q}\beta^{p} \tag{2.39}$$

כאשר θ פרמטר. את הניחוש הזה נציב באגף שמאל של (2.38) ונפתח

$$\begin{aligned}\Lambda^{n}{}_{i}\Lambda^{\ell}{}_{j}\beta^{n}\beta^{\ell} &= \beta^{n}\beta^{\ell}[\delta_{ni}+\theta\beta^{n}\beta^{i}][\delta_{\ell j}+\theta\beta^{\ell}\beta^{j}]\\ &= \beta^{n}\beta^{\ell}[\delta_{ni}\delta_{\ell j}+\theta\delta_{ni}\beta^{\ell}\beta^{j}+\theta\beta^{n}\beta^{i}\delta_{\ell j}+\theta^2\beta^{n}\beta^{i}\beta^{\ell}\beta^{j}]\\ &= \beta^{i}\beta^{j}+\theta\beta^{i}\beta^{j}\beta^{\ell}\beta^{\ell}+\theta\beta^{n}\beta^{n}\beta^{i}\beta^{j}+\theta^2\beta^{i}\beta^{j}\beta^{n}\beta^{n}\beta^{\ell}\beta^{\ell}\end{aligned}$$

עכשיו נעשה שימוש בעובדה כי $|\boldsymbol{\beta}|^2\equiv\beta^{\ell}\beta^{\ell}\equiv\beta^{n}\beta^{n}$,

$$\Lambda^{n}{}_{i}\Lambda^{\ell}{}_{j}\beta^{n}\beta^{\ell}=\beta^{i}\beta^{j}+2\theta\beta^{i}\beta^{j}|\boldsymbol{\beta}|^2+\theta^2\beta^{i}\beta^{j}|\boldsymbol{\beta}|^4 \tag{2.40}$$

נפנה עתה את תשומת הלב לאגף ימין של (2.38), נציב בו את (2.39), ובאופן דומה נקבל

$$\begin{aligned}\Lambda^k{}_i\Lambda^k{}_j &= [\delta_{ki}+\theta\beta^k\beta^i][\delta_{kj}+\theta\beta^k\beta^j]\\ &= \delta_{ij}+2\theta\beta^i\beta^j+\theta^2|\boldsymbol{\beta}|^2\beta^i\beta^j\end{aligned} \tag{2.41}$$

עכשיו נציב ב-(2.38) את (2.40) ו-(2.41) ונקבל (תוך כדי שימוש בסימון $\beta=|\boldsymbol{\beta}|$):

$$\begin{aligned}\beta^i\beta^j+2\theta\beta^i\beta^j|\boldsymbol{\beta}|^2+\theta^2\beta^i\beta^j|\boldsymbol{\beta}|^4 &= 2\theta\beta^i\beta^j+\theta^2|\boldsymbol{\beta}|^2\beta^i\beta^j\\ 1+2\theta|\boldsymbol{\beta}|^2+\theta^2|\boldsymbol{\beta}|^4 &= 2\theta+\theta^2|\boldsymbol{\beta}|^2\\ \theta^2\beta^2(1-\beta^2)+2\theta(1-\beta^2)-1 &= 0\\ \beta^2\theta^2+2\theta-\frac{1}{1-\beta^2} &= 0\\ \beta^2\theta^2+2\theta-\gamma^2 &= 0\end{aligned}$$

כאשר $\gamma=(1-\beta^2)^{-1/2}$, כרגיל. קיבלנו משוואה ריבועית עבור הפרמטר θ, שפתרונה

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{-2\pm\sqrt{4+4\beta^2\gamma^2}}{2\beta^2}\\ &= -\frac{1}{\beta^2}\pm\frac{\sqrt{1+\beta^2\gamma^2}}{\beta^2}\end{aligned}$$

אבל, מתוך הקשר $\gamma^2-\gamma^2\beta^2=1$ ניתן להסיק כי

$$\begin{aligned}1+\beta^2\gamma^2 &= \gamma^2-\gamma^2\beta^2+\beta^2\gamma^2=\gamma^2\\ \Rightarrow\theta &= \frac{-1\pm\gamma}{\beta^2}\end{aligned}$$

הצבה של θ לתוך (2.39) נותנת לנו

$$\Lambda^q{}_p=\delta_{qp}+\theta\beta^q\beta^p=\delta_{qp}+\frac{-1\pm\gamma}{\beta^2}\beta^q\beta^p$$

האם יש סימן מועדף בין ה-$+$ ל-$-$? במקרה הפרטי $\boldsymbol{\beta}=\beta\hat{\mathbf{z}}$ אזי

$$\Lambda^z{}_z = 1+\frac{-1\pm\gamma}{\beta^2}\beta^2=1-1\pm\gamma=\pm\gamma$$

אבל מתוך הנוסחא ל-boost, (2.18), אנו יודעים כי $\Lambda^z{}_z=\gamma$, כלומר אנו חייבים לבחור $+$. הגענו אם כן לצורה

$$\Lambda^i{}_j=\delta_{ij}+\frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta^i\beta^j \tag{2.42}$$

כמו כן, אנו משחזרים כאן את (2.36)

$$\Lambda^0{}_0=\gamma,\Lambda^i{}_0=\gamma\beta^i \tag{2.43}$$

וכדי להשלים את הפתרון נשתמש ב-(2.37)

$$\begin{aligned}
\Lambda^0{}_i &= \Lambda^j{}_i \beta^j \\
&= \left(\delta_{ji} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta^j\beta^i\right)\beta^j \\
&= \beta^i + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta^2\beta^i \\
&= \beta^i + (\gamma-1)\beta^i = \gamma\beta^i \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

משוואות (2.42), (2.43) ו-(2.44) הן בעיקרון מה שחיפשנו. אבל אם ננסה לבצע בדי-קה ע"י הצבת $\boldsymbol{\beta} = (0,0,\beta)$ והשוואה ל-(2.18) נראה כי יש לנו היפוך סימן, כלומר נוסחאות (2.42), (2.43) ו-(2.44) מתארות לנו boost במהירות $-\boldsymbol{\beta}$. הסיבה נעוצה בכך שהמטריקה אמורה להיות טנזור קובריאנטי, כלומר, לפי (2.26)

$$g_{\rho\sigma} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\nu{}_\sigma g_{\mu\nu}$$

כלומר, משוואה (2.35) בעצם מתארת טרנספורמציה עם $-\boldsymbol{\beta}$... לפיכך boost ממערכת K למערכת K' הנעה במהירות $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{V}/c$ ביחס ל-K נתונה ע"י

$$\Lambda^i{}_j = \delta_{ij} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta^i\beta^j \qquad (2.45)$$

$$\Lambda^0{}_0 = \gamma \qquad (2.46)$$

$$\Lambda^i{}_0 = \Lambda^0{}_i = -\gamma\beta^i \qquad (2.47)$$

או בצורה מטריצית

$$\boldsymbol{\Lambda} = \left\{ \begin{array}{cc} \gamma & -\gamma\boldsymbol{\beta}^T \\ -\gamma\boldsymbol{\beta} & \delta_{ij} + \frac{\gamma-1}{\beta^2}\beta^i\beta^j \end{array} \right\} \qquad (2.48)$$

אנו יכולים לבדוק את הפתרון שלנו ע"י הצבה בקריטריון (2.35), פרוצדורה שנשאיר לקורא.

בדיקה נוספת תגלה לנו טעות קטנה: הטרנספורמציה בנוסחאות (2.42

פרק 3

תורת היחסות הפרטית - מכניקה לגרנז'יאנית

כידוע, ניתן לתאר את המכניקה הניוטונית בעזרת עיקרון פעולה (עיקרון המילטון), הקובע שהמסלול כי התלות של הקואורדינטות בזמן, $x(t)$, היא כזו שהאינטגרל

$$S = \int dt\, L(x, \dot{x}) \tag{3.1}$$

הוא אקסטרמום. מתוך דרישה זו ניתן לפתח את משוואות אוילר-לגרנז',

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \tag{3.2}$$

כאשר $L(x, \dot{x})$ הוא הלגרנז'יאן. בפרק זה נדון בהכללה של השיטה של לגרנז' עבור מערכות יחסותיות. שיטה זו מהווה כלי חזק לבניית תיאוריות שעיקביות עם יחסות. הדבר נובע מכך שאם נבחר פעולה S שהיא סקלר של לורנץ, אזי הפעולה תהיה זהה בכל מערכות היחוס האינירציאליות. לפיכך אם $x(t)$ הוא פתרון במערכת אחת, הגרסה שלו $x'(t')$ במערכת אחרת גם היא נותנת לפעולה אקסטרמום, ולכן גם היא פתרון.

3.1 הלגרנז'יאן של חלקיק חופשי

ראשית, מתוך מה שנלמד בפרק 2, אנו יודעים כי ניתן להציג את המסלול של חלקיק $\mathbf{x}(t)$ בצורה פרמטרית

$$x^\mu = x^\mu(\tau)$$

כאשר τ הוא הזמן העצמי של החלקיק הנקבע ע"י

$$d\tau^2 = dx^\mu dx_\mu$$

לפיכך בהנתן $x^\mu(\tau)$ ניתן לפתור את המשוואה $x^0 = t = t(\tau)$ עבור τ ולקבל בחזרה את $\mathbf{x}(t)$. הפעולה, כידוע, היא האינטגרל $S = \int dt\, L$, כאשר $L = L(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ ו-$\mathbf{v} = d\mathbf{x}/dt$.

ניתן לרשום אותה כאינטגרל על הזמן העצמי של החלקיק כך,

$$S = \int d\tau \, L \frac{dt}{d\tau} = \int d\tau \, L\gamma(\mathbf{v})$$

כאשר השתמשנו ביחס הידוע של התארכות הזמן (2.27). על מנת ש-S יהיה סקלר, ברור כי $L\gamma$ צריך להיות סקלר. עבור חלקיק חופשי, אנו יודעים מראש כי המסלול הפיזיקלי הוא תנועה במהירות קבועה בקו ישר. הבה נעיין בתנועה של החלקיק במערכת המנוחה שלו: במערכת זו החלקיק פשוט נשאר במנוחה במקום. הפעולה שלו, משוערכת על המסלול הפיזיקלי במערכת זו היא

$$S_p = \int d\tau \, L_0$$

כאשר סימנו $L_0 \equiv L(\mathbf{v}=0)$. מאחר ש-$L\gamma$ הוא סקלר, נובע מכך כי במערכת אחרת (על המסלול הפיזיקלי[1])

$$L\gamma = L_0$$

כלומר[2]

$$L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$$

כלומר הלגרנז'יאן הוא קבוע, L_0, כפול $\sqrt{1-\mathbf{v}^2}$. כדי לברר את הקבוע הזה, נזכור כי בגבול הניוטוני, $|\mathbf{v}| \ll 1$, הצורה של הלגרנז'יאן חייבת לשאוף לצורה הניוטונית[3], כלומר $L_N = \frac{m\mathbf{v}^2}{2}$. נפתח, אם כן, את L שקיבלנו בטור טיילור עבור מהירויות קטנות ונקבל

$$\begin{aligned} L\big|_{|\mathbf{v}|\ll 1} &\simeq L_0\left(1-\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) \\ &= L_0 - L_0\frac{\mathbf{v}^2}{2} \end{aligned}$$

צורה זו תהיה שקולה ל-L_N אם נדרוש $L_0 = -m$, ולפיכך הלגרנז'יאן של חלקיק חופשי יחסותי הוא

$$L = -m\sqrt{1-\mathbf{v}^2} \tag{3.3}$$

והפעולה שלו היא

$$\begin{aligned} S &= -m\int dt\,\sqrt{1-\mathbf{v}^2} \\ &= -m\int dt/\gamma \\ &= -m\int d\tau \end{aligned} \tag{3.4}$$

כלומר המסלול הפיזיקלי הוא זה שנותן לאינטגרל של הזמן העצמי אקסטרמום.

---

[1] העובדה שאנו מגבילים את הדיון למסלול הפיזיקלי תאפשר לנו לנחש את צורתו של הלגרנז'יאן. בדיעבד, הניחוש הזה ייתן את משוואות התנועה הנכונות (3.7), מה שיצדיק את הבחירה באופן כללי ולא רק למסלול הפיזיקלי.

[2] אנו משתמשים לאורך הפרק הזה ביחידות בהן $c=1$, ולכן $\gamma(\mathbf{v}) = \sqrt{1-\mathbf{v}^2}$ ולא $\sqrt{1-\mathbf{v}^2/c^2}$.

[3] או צורה השקולה לה, כגון $mv^2/2 + dF(x,t)/dt$.

3.2 משוואות התנועה של חלקיק חופשי

כדי להביא את הפורמליזם הלגרנז'יאני על המשטר היחסותי במלוא הדרו, עלינו לרשום משוואה אנלוגית ל-(3.1), כלומר משהו כזה

$$S[x^\mu] = \int ds\, \mathcal{F}(x^\mu, U^\mu)$$

כאשר $U^\mu = dx^\mu/ds$ הן ה"מהירויות" ואילו s הוא פרמטר שבעזרתו אנו מציגים את המסלול[4] $x^\mu(s)$. ובכן, לפי הפרוצדורה הרגילה במכניקה אנליטית, נציג וריאציה ב-x^μ, שנסמנה δx^μ. ווריאציה זו גוררת וריאציה $\delta U^\mu = \frac{d}{ds}\delta x^\mu$. אם כך, הווריאציה בפעולה תהיה

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int ds\, \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial U^\mu}\delta U^\mu\right] \\
&= \int ds\, \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial U^\mu}\frac{d(\delta x^\mu)}{ds}\right] \\
&= \delta x^\mu \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\mu}\bigg|_{s_1}^{s_2} + \int ds\, \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu - \delta x^\mu \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial U^\mu}\right)\right]
\end{aligned}$$

אנו שואלים את השאלה, מבין כל המסלולים שמגיעים מ-$x^\mu(s_1)$ ל-$x^\mu(s_2)$, מהו זה שנותן אקסטרמום לפעולה? לפיכך הווריאציה מתאפסת בקצוות, ונותרנו עם

$$\delta S = \int ds\, \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\mu} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial U^\mu}\right)\right]\delta x^\mu(s)$$

ומאחר ש-$\delta x^\mu(s)$ שרירותי (אך קטן), זה גורר

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\mu} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial U^\mu}\right)$$

לפני שנמשיך, נעיין בקשר בין s לבין τ. ברור כי

$$\begin{aligned}
d\tau^2 &= dx^\mu dx_\mu \\
&= U^\mu U_\mu ds^2
\end{aligned}$$

כלומר

$$\frac{d\tau}{ds} = \sqrt{U^\mu(s) U_\mu(s)} \tag{3.5}$$

הבא נבחר את תנאי ההתחלה כך

$$\tau(s=0) = 0$$

אזי ברור כי הפתרון $\tau(s) = s$ הוא עקבי עם (3.5)[5]. בינתיים נמשיך עם s. עבור חלקיק חופשי[6]

$$\mathcal{F} = -m\sqrt{U^\alpha U_\alpha} \tag{3.6}$$

[4] איננו רוצים להשתמש ב-τ למטרה זו, הואיל ואז $U^\mu \equiv u^\mu$ ולכן יהיה אילוץ $u^\mu u_\mu = 1$, מה שמסבך את העניין ללא צורך.

[5] יוצא מזה כי כל פתרון אחר אפשרי $\tau'(s)$ היה מקיים $\tau' = \tau + \text{const}$

[6] ניתן להסיק זאת מתוך (3.4) ע"י $\int d\tau = \int \sqrt{dx^\mu dx_\mu} = \int \sqrt{U^\mu U_\mu} ds$

ולפיכך (אני מפרט כאן את החישוב, כדי שיהיה מובן כיצד לבצע חישובים שכאלה)

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial U^{\mu}} &= -m\frac{\partial}{\partial U^{\mu}}\left(\sqrt{U^{\alpha}U_{\alpha}}\right) \\
&= -\frac{m}{\sqrt{U^{\alpha}U_{\alpha}}}\frac{\partial}{\partial U^{\mu}}\left(U^{\alpha}U^{\beta}g_{\alpha\beta}\right) \\
&= -\frac{m}{\sqrt{U^{\alpha}U_{\alpha}}}g_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial u^{\mu}}\left(U^{\alpha}U^{\beta}\right) \\
&= -\frac{m}{\sqrt{U^{\alpha}U_{\alpha}}}g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial U^{\alpha}}{\partial U^{\mu}}U^{\beta}+U^{\alpha}\frac{\partial U^{\beta}}{\partial U^{\mu}}\right) \\
&= -\frac{m}{\sqrt{U^{\alpha}U_{\alpha}}}g_{\alpha\beta}\left(\delta^{\alpha}_{\mu}U^{\beta}+U^{\alpha}\delta^{\beta}_{\mu}\right) \\
&= -\frac{m}{\sqrt{U^{\alpha}U_{\alpha}}}\left(g_{\mu\beta}U^{\beta}+g_{\alpha\mu}U^{\alpha}\right)
\end{aligned}$$

כזכור, הרי ניתן לשנות שמות של אינדקסים שסוכמים עליהם, וכמו כן $g_{\alpha\mu}=g_{\mu\alpha}$, לכן

$$g_{\alpha\mu}U^{\alpha}=g_{\mu\alpha}U^{\alpha}=g_{\mu\beta}U^{\beta}$$

כלומר

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial U^{\mu}} &= -\frac{2mg_{\mu\beta}U^{\beta}}{\sqrt{U^{\alpha}U_{\alpha}}} \\
&= -\frac{2mU_{\mu}}{\sqrt{U^{\alpha}U_{\alpha}}}
\end{aligned}$$

ולפיכך משוואת התנועה של חלקיק חופשי היא

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{-2mU_{\mu}}{\sqrt{U^{\alpha}U_{\alpha}}}\right)=0$$

או לחילופין, מאחר ש-[7]

$$u^{\mu}=\frac{dx^{\mu}}{d\tau}=U^{\mu}\frac{ds}{d\tau}$$

ניתן לרשום

$$\begin{aligned}
\frac{d\tau}{ds}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{m\frac{d\tau}{ds}u_{\mu}}{\sqrt{u^{\alpha}u_{\alpha}\left(\frac{d\tau}{ds}\right)^{2}}}\right) &= 0 \\
\frac{d}{d\tau}\left(mu_{\mu}\right) &= 0
\end{aligned}$$

ובגרסתה הקונטרה-וריאנטית

$$\frac{d}{d\tau}\left(mu^{\mu}\right)=0$$

[7] u^{μ} הוא ה-4 וקטור של המהירות ממשוואה (2.28).

או

$$m\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \tag{3.7}$$

ברור לקורא, כי אם היינו מציבים $\tau = s$ במשוואה (3.6), היינו עלולים להסתמך על $u^\alpha u_\alpha = 1$ ולהסיק

$$\mathcal{F} = -m$$

מה שהיה מונע מאיתנו להגיע למשוואות התנועה הנכונות. הקביעה כי $\tau = s$ היא אפשרית, אבל רק בהנתן פתרון של משוואות התנועה, כלומר בדיעבד. לפיכך, רק לאחר שקיבלנו את משוואות התנועה, ניתן להשתמש באילוץ $u^\alpha u_\alpha = 1$.

3.3 לא כל כח הוא עיקבי עם תורת היחסות

במכניקה ניוטונית, הלגרנז'יאן בדרך כלל ניתן לכתיבה כך

$$L = T - V$$

כאשר T היא האנרגיה הקינטית של המערכת, ואילו $V(\mathrm{x})$ האנרגיה הפוטנציאלית, התלויה ב-x בלבד. נראה כי במכניקה ניוטונית, אין מגבלה מיוחדת על הצורה של $V(\mathrm{x})$. אנו נראה עתה כי במצבים יחסותיים ישנן מגבלות. כדי לעיין בכך, נניח כי הפונקציה $\mathcal{F}$ היתה נתונה ע"י

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_f - \Phi(x)$$

כאשר $\mathcal{F}_f = -m\sqrt{U^\alpha U_\alpha}$ היא הפונקציה של חלקיק חופשי, ואילו הפונקציה הסקלר-ית $\Phi(x)$ מייצגת איזהשהוא פוטנציאל נתון, שמשפיע על תנועת החלקיק. משוואות התנועה יהיו

$$m\frac{du^\mu}{d\tau} = -\partial^\mu\Phi \tag{3.8}$$

עכשיו, מאחר ש-$u^\mu u_\mu = 1$ קבוע, נובע כי

$$\frac{d}{d\tau}(u^\mu u_\mu) = 0$$
$$u_\mu\frac{du^\mu}{d\tau} = 0$$

לפיכך, נכפיל את (3.8) ב-u_μ ונסכום,

$$\begin{aligned} mu_\mu\frac{du^\mu}{d\tau} = 0 &= -u_\mu\partial^\mu\Phi \\ &= -u^\mu\partial_\mu\Phi \end{aligned}$$

כלומר

$$u^\mu\partial_\mu\Phi = 0 \tag{3.9}$$

בכל נקודה ונקודה של מסלול החלקיק. לפיכך, אם Φ נתון מראש, יוצא כי אין לנו חופש לבחור את תנאי ההתחלה. ניתן לבחור את נקודת ההתחלה של החלקיק $x^\mu(0)$ כרצוננו, אבל $u^\mu(0)$ מאולץ ע"י (3.9). ברור כי זה לא פיזיקלי, ולפיכך אנו רואים כי צורה זו של אינטראקציה לא מתיישבת עם תורת היחסות.

תורת היחסות מטילה מגבלות על צורות האינטראקציה האפשריות.

3.4 סימטריות של הפעולה וגדלים נשמרים

עובדה ידועה היטב, המכונה בשם משפט נתר, היא כי סימטריות רציפות של חוקי הפיזיקה גוררות את קיומם של גדלים נשמרים. אנו נפתח כאן את משפט נתר עבור תנועה של חלקיק תחת עיקרון פעולה $S = \int d\tau\, \mathcal{F}(x^\mu, u^\mu)$ כלשהו[8]. הפיתוח התיאורטי יהיה נהיר רק לאחר הדוגמאות שיבואו לאחריו, אז לא להתייאש.

נניח, אם כן, כי קיימת טרנספורמציה

$$X^\mu = X^\mu(x, \alpha_J)$$

כאשר x כאן מתייחס לכל ה-x^μ, ואילו α_J כאשר $J = 1, 2, \ldots, n$ הם n פרמטרים רציפים שמגדירים את הטרנספורמציה, כך שעבור $\alpha_J = 0$ מתקבל טרנספורמצית הזהות:

$$X^\mu(x, \alpha_J = 0) = x^\mu$$

נניח, כי $\mathcal{F}$ מקיימת[9]

$$\mathcal{F}(X^\mu, U^\mu) = \mathcal{F}(x^\mu, u^\mu) + \frac{d\phi(x^\mu)}{d\tau} \tag{3.10}$$

במצב כזה הפעולה תגיב לטרנספורמציה באופן הבא:

$$S[X^\mu] = S[x^\mu] + \int d\tau\, \frac{d\phi}{d\tau} = S[x^\mu] + \phi(x^\mu)|_{\tau_1}^{\tau_2}$$

מאחר שכזכור, הווריאציה δx^μ מתאפסת בקצוות[10], יוצא מזה כי בהנחה כי $x^\mu(\tau)$ נותן לפעולה אקסטרמום, גם X^μ יתן לה אקסטרמום. כלומר אם $x^\mu(\tau)$ הוא פתרון של משוואות התנועה, גם $X^\mu(\tau)$ יהיה. כדוגמא פשוטה (אנו נשתמש בסימנים x, u כדי לייצג את x^μ, u^μ), נניח כי

$$\mathcal{F}(x, u) = x^\mu u_\mu$$

וכי הטרנספורמציה היא טרנספורמצית לורנץ, $X^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, U^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu$. מאחר ש-$\mathcal{F}$ סקלר בבירור, הרי מתקיים

$$\mathcal{F} = X^\mu U_\mu$$

[8] אני רושם ברישול מסויים $\int d\tau$ ולא $\int ds$ וכמו כן u^μ ולא U^μ, משום שכבר למדנו איך להתמודד עם הנושא (עמ' 53).

[9] U^μ היא הטרנספורם של u^μ, ולא dx^μ/ds.

[10] עמ' 51

כלומר הצורה זהה, ומתקיים שוויון

$$\mathcal{F}(X^\mu, U^\mu) = \mathcal{F}(x^\mu, u^\mu)$$

שהוא מקרה פרטי כמובן של (3.10). נחזור למקרה הכללי. מאחר שהפרמטרים α_J רציפים, קיימת גרסה אינפיניטיסימלית של הטרנספורמציה

$$X^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \equiv x^\mu + \alpha_J \Delta^{(J)\mu}(x) + O(\alpha^2)$$

כלומר השינוי ב-x^μ הוא

$$\delta x^\mu = \alpha_J \Delta^{(J)\mu} \tag{3.11}$$

כאשר $\Delta^{(J)\mu}$ היא פונקציה של ה-x^μ ומוגדרת באופן פורמלי ע"י

$$\Delta^{(J)\mu} = \left.\frac{\partial X^\mu}{\partial \alpha_J}\right|_{\text{all } \alpha_J = 0}$$

הגרסה האינפיניטיזימלית של (3.10) היא

$$\delta \mathcal{F} = \alpha_J \frac{d\phi^{(J)}}{d\tau} \tag{3.12}$$

מצד שני ברור כי

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{F} &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\delta u^\mu \\ &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\mu}\delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau}\end{aligned}$$

לפי משוואות התנועה $\partial\mathcal{F}/\partial x^\mu = (d/d\tau)(\partial\mathcal{F}/\partial u^\mu)$ כלומר

$$\begin{aligned}\delta \mathcal{F} &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\right)\cdot \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\frac{d(\delta x^\mu)}{d\tau} \\ &= \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\delta x^\mu\right)\end{aligned}$$

לפי (3.12) מתקיים אם כך השוויון

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\delta x^\mu\right) = \alpha_J \frac{d\phi^{(J)}}{d\tau}$$

נציב את (3.11) ונקבל

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\alpha_J \Delta^{(J)\mu}\right) = \alpha_J \frac{d\phi^{(J)}}{d\tau}$$

$$\alpha_J \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\Delta^{(J)\mu} - \phi^{(J)}\right) = 0 \tag{3.13}$$

אם ה-α_J הם בלתי תלויים, ניתן להשוות את כולם לאפס חוץ מאחד מהם, ובאופן זה לקבל את הגדלים הנשמרים,

$$I^{(J)} \equiv \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\Delta^{(J)\mu} - \phi^{(J)} = \text{const.}$$

אם ה-α_J ב-(3.13) תלויים, צריך להביע אותם באמצעות פרמטרים אחרים בלתי תלויים כדי להסיק מהם הגדלים הנשמרים. מספר הגדלים הנשמרים כמספר הפרמטרים.

3.4.1 משפט נתר - אנרגיה ותנע

נניח כי ה-$\mathcal{F}$ שלנו סימטרי לטרנספורמציה הבאה

$$X^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu$$

כלומר, להזזות (במרחב ובזמן). לשם הפשטות נניח כי הסימטריה היא

$$\mathcal{F}(X^\mu) = \mathcal{F}(x^\mu)$$

כלומר ללא ה-$d\phi/d\tau$. כדוגמא ה-$\mathcal{F}$ של חלקיק חופשי מקיים זאת. הפרמטרים שלנו הם ה-ϵ^μ, ולפיכך האינדקס שמסמן אותם J הוא למעשה μ. ובכן, כאשר ϵ^μ אינפיני-טיזימלים, אנו יכולים לזהות כי

$$\delta x^\mu = \epsilon^\mu = \epsilon^\nu \delta^\mu_\nu$$

כלומר

$$\Delta^{(\nu)\mu} = \delta^\mu_\nu$$

מאחר שכל ה-ϵ^μ בלתי תלויים, אזי נשמרים לנו הגדלים

$$p^{(\nu)} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\Delta^{(\nu)\mu}$$

כאשר בפועל יש לרשום זאת כך, עקב האופי הטנזורי של האינדקס ν:

$$p_\nu = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\delta^\mu_\nu \equiv \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\nu}$$

או בגרסה קונטראוריאנטית

$$p^\mu = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_\mu} \tag{3.14}$$

עבור חלקיק חופשי,

$$p^\mu = mu^\mu$$

כלומר הוקטור של ה-4 תנע כפי שהוגדר במשוואה (2.29).

3.4.2 משפט נתר - תנע זויתי

תנע זוויתי הוא הגודל הנשמר כתוצאה מסימטריה לסיבובים. טרנספורמצית סיבוב היא טרנספורמציה ליניארית, השומרת על האורך של הוקטור (התלת-מימדי), ואינה משנה את רכיב הזמן, כלומר

$$X^0 = x^0$$
$$X^i = R_{ij}x^j$$

כאשר R_{ij} מטריצה אורתוגונלית, כלומר

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{R}\mathbf{x}$$

ו-$\boldsymbol{R}$ מקיימת

$$\boldsymbol{R}^T\boldsymbol{R} = \mathbf{1}$$

נעיין עתה בטרנספורמצית סיבוב אינפיניטיזימלית, כלומר $\mathbf{R} = \mathbf{1} + \mathbf{r}$ כאשר r_{ij} הם אינפיניטיזימליים. אם כך,

$$(\mathbf{1} + \mathbf{r})^T(\mathbf{1} + \mathbf{r}) = \mathbf{1}$$
$$\mathbf{1} + \mathbf{r} + \mathbf{r}^T + O(r^2) = \mathbf{1}$$

כלומר

$$\mathbf{r} = -\mathbf{r}^T$$

או $r_{ij} = -r_{ji}$. מטריצה 3×3 אנטיסימטרית יש בה רק שלושה אלמנטים בלתי תלויים. לפיכך ניתן לרשום אותה בעזרת הסמל האנטיסימטרי בשלושה מימדים (לתזכורת, פנה/י לחלק 2.1.4 בפרק 2),

$$r_{ij} = \epsilon_{ijk}\alpha_k$$

והפרמטרים הבלתי תלויים הם α_k. השינוי האינפיניטיזימלי ב-$\mathbf{x}$ יהיה לפיכך

$$\delta x^i = r_{ij}x^j$$
$$= \epsilon_{ijk}x^j\alpha_k$$

מה ששקול אגב ל-

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\alpha}$$

בכל מקרה אנו מזהים כאן

$$\Delta^{(k)i} = \epsilon_{ijk}x^j$$

כאשר מימד הזמן לא משתתף

$$\Delta^{(k)0} = 0$$

לפיכך ישמרו לנו הגדלים (שוב, נניח כי $d\phi/d\tau = 0$)

$$M^{(k)} \equiv \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u^i}\Delta^{(k)i}$$

נשתמש ב-(3.14) ונקבל,

$$\begin{aligned} M^{(k)} &= p_i \epsilon_{ijk} x^j \\ &= -\epsilon_{ijk} p^i x^j \\ &= \epsilon_{kji} x^j p^i \\ &= \epsilon_{klm} x^l p^m \end{aligned}$$

או בצורה התלת-מימדית המוכרת

$$\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$$

כלומר, התנע הזוויתי.

3.5 הפעולה של חלקיק בשדה אלקטרומגנטי נתון

3.5.1 יצוג קובריאנטי של השדה האלקטרומגנטי

את השדה האלקטרומגנטי ניתן, כידוע, לייצג ע"י 4 פוטנציאלים,

$$\Phi, \mathbf{A}$$

כך שהשדות עצמם נתונים ע"י

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \tag{3.15}$$

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A} \tag{3.16}$$

לא נוכיח זאת כאן, אבל השדות $\Phi, \mathbf{A}$ יוצרים יחדיו 4 - וקטור:

$$A^\mu \sim (\Phi, \mathbf{A})$$

באמצעותו ניתן להגדיר את טנזור השדות האנטיסימטרי,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

שמכיל בתוכו את $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ בהתאם לנוסחאות (3.15) ו-(3.16). לדוגמא, ניקח F^{i0} ונקבל

$$\begin{aligned} F^{i0} &= \partial^i A^0 - \partial^0 A^i \\ &= -\partial_i A^0 - \partial_0 A^i \\ &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial t} \end{aligned}$$

ולפי (3.15) זה בדיוק E_i. לפיכך הרכיבים F^{i0} הם השדה החשמלי, ואילו F^{ij} הם השדה המגנטי, לפי ההתאמה

$$F^{ij} = \epsilon_{ijk} B_k$$

3.5.2 הלגרנז'יאן של חלקיק בשדה א"מ חיצוני

בהנתן כל זה, מהו הלגרנז'יאן שיתאר את תנועתו של חלקיק בשדה כזה, או לחילופין, מהו $\mathcal{F}$ המתאים? מסתבר כי הבחירה המתאימה היא

$$\mathcal{F} = -m\sqrt{u^\alpha u_\alpha} - qu_\alpha A^\alpha \tag{3.17}$$

או לחילופין, הלגרנזי'אן הוא

$$L = -m\sqrt{1-\mathbf{v}^2} - q(\Phi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A})$$

או, עם אינדקסים

$$L = -m\sqrt{1-v^iv^i} - q(\Phi - v^iA^i)$$

משוואות התנועה הן משוואות אוילר לגרנז',

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v^i}\right) &= \frac{\partial L}{\partial x^i} \\
\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^i}{\sqrt{1-\mathbf{v}^2}} + qA^i\right) &= -q\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + qv^j\frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\
\frac{d}{dt}\left(\gamma m v^i\right) + q\frac{\partial A^i}{\partial x^j}\frac{dx^j}{dt} &= -q\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + qv^j\frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\
\frac{d}{dt}\left(\gamma m v^i\right) + q\frac{\partial A^i}{\partial x^j}v^j &= -q\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + qv^j\frac{\partial A^j}{\partial x^i} \\
\frac{d}{dt}\left(\gamma m v^i\right) &= -q\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + qv^j\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - q\frac{\partial A^i}{\partial x^j}v^j \\
&= qE_i + qv^j(\partial_i A^j - \partial_j A^i) \\
&= qE_i + qv^j(\partial^j A^i - \partial^i A^j) \\
&= qE_i + qv^jF^{ji} = qE_i + qv^jF^{ij} \\
&= qE_i + q\epsilon_{ijk}v^jB_k
\end{aligned}$$

כלומר

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma m\mathbf{v}\right) = q(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B})$$

כלומר $d\mathbf{p}/dt$ שווה לכח לורנץ. זו משוואת התנועה של חלקיק בשדה אלקטרומגנטי. ני-תן לקבל את הגרסה הקובריאנטית שלה ע"י לקיחת משוואות התנועה הקובריאנטיות

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u^\mu}\right) &= \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial x^\mu} \\
\frac{d}{d\tau}\left(-\frac{mu_\mu}{\sqrt{u^\alpha u_\alpha}} - qA_\mu\right) &= -qu^\alpha \partial_\mu A_\alpha \\
\frac{d}{d\tau}\left(-mu_\mu - qA_\mu\right) &= -qu^\alpha \partial_\mu A_\alpha \\
\frac{d(mu_\mu)}{d\tau} + q\frac{dA_\mu}{d\tau} &= qu^\alpha \partial_\mu A_\alpha \\
\frac{d(mu_\mu)}{d\tau} + q\frac{dx^\alpha}{d\tau}\partial_\alpha A_\mu &= qu^\alpha \partial_\mu A_\alpha \\
\frac{d(mu_\mu)}{d\tau} + qu^\alpha \partial_\alpha A_\mu &= qu^\alpha \partial_\mu A_\alpha \\
\frac{d(mu_\mu)}{d\tau} &= qu^\alpha(\partial_\mu A_\alpha - \partial_\alpha A_\mu) \\
&= qu^\alpha F_{\mu\alpha}
\end{aligned}
$$

או בצורה החביבה עלי יותר

$$\frac{d(mu^\mu)}{d\tau} = qF^{\mu\nu}u_\nu$$

יש לשים לב, אנו יודעים כי ה-$\mathcal{F}$ שבחרנו הוא הנכון משום שהוא נותן את המשוואות הנכונות. דבר זה נראה מעגלי, ואמנם זה כך. אין הכוונה כי הלגרנז'יאן או $\mathcal{F}$ המתאים לו מהווים את ה"בסיס" הלוגי שממנו ניתן לגזור את המכניקה, אלא הם מהווים מכשיר שממנו נח לגזור מסקנות, כגון משפט נתר. עקרונית, היה ניתן להוכיח כי הגדלים של משפט נתר נשמרים מתוך מניפולציות על משוואות התנועה באופן ישיר, אך ברור כי המכניקה הלגרנז'יאנית היא פרוצדורה עדיפה בהרבה.

3.5.3 סימטריית כיול

ל-$\mathcal{F}$ ממשוואה (3.17) יש תכונה מעניינת. אם נציב לתוכה A'^μ חדש שמוגדר ע"י

$$A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \chi$$

כאשר χ פונקציה סקלרית, נקבל

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}' &= -m\sqrt{u^\alpha u_\alpha} - qu_\alpha A'^\alpha \\
&= -m\sqrt{u^\alpha u_\alpha} - qu_\alpha A^\alpha - qu_\alpha \partial^\alpha \chi \\
&= \mathcal{F} - q\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{\partial \chi}{\partial x^\alpha} \\
&= \mathcal{F} - q\frac{d\chi}{d\tau}
\end{aligned}
$$

כלומר תוספת של נגזרת שלמה. לפיכך הפעולה החדשה נבדלת מהקודמת באיבר שפה בלבד,

$$S' = S - q\chi|_{\tau_1}^{\tau_2}$$

ולכן כאשר יש ל-S אקסטרמום יהיה גם ל-S' אקסטרמום, כלומר השדות A^μ ו-A'^μ שקולים מבחינה פיזיקלית.

פרק 4

סקירה של מכניקה קלאסית

הסכם הסכימה

אנו נסכים שכאשר אינדקס חוזר פעמיים, סוכמים עליו:

$$A_i B_i \equiv \sum_i A_i B_i$$

4.1 מכניקה לגרנז'יאנית

במכניקה, מערכת מתוארת ע"י קורדינטות q_i. המסלול הפיזיקלי הוא זה שנותן אקסטרמום לפעולה

$$S = \int dt\, L(q, \dot{q})$$

כאשר $L(q, \dot{q})$ הוא הלגרנז'יאן של המערכת, בד"כ $L = T - V$. אקסטרמום של הפעולה מוביל אותנו למשוואות אוילר לגרנז':

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

מגדירים את התנע הקנוני $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$. משוואות התנועה הן עתה,

$$\dot{p} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

4.2 מכניקה המילטוניאנית

ההמילטוניאן הוא טרנספורם לג'נדר של הלגרנז'יאן

$$H(q, p) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$$

המשתנים q,p נקראים משתנים קנוניים. ההמילטוניאן עבור מערכת אופיינית שווה באופן נומרי לאנרגיה של המערכת, כלומר $H = T + V$. אפשר לנסח את המכניקה כבעיה מתמטית של למצוא אקסטרמום של הפעולה,

$$S = \int dt[p_i\dot{q}_i - H(q,p)]$$

כאשר p,q הם משתנים בלתי תלויים. מקבלים,

$$\begin{aligned}\delta S &= \int dt[\dot{q}_i\delta p_i + p_i\delta\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial q_i}\delta q_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\delta p_i] \\ &= p_i\delta q_i|_{t_1}^{t_2} + \int dt\left[\delta p_i\left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i}\right) - \delta q_i\left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\right)\right]\end{aligned}$$

ומכאן ש -

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

אלה המשוואות הקנוניות.

4.3 סוגרי פואסון

סוגר פואסון מוגדר כך:

$$\{U,V\} = \sum_i\left[\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right]$$

אלגברה של סוגרי פואסון:

$$\begin{aligned}\{U,VW\} &= V\{U,W\} + \{U,V\}W \\ \{U,V\} &= -\{V,U\}\end{aligned}$$

במקרה של $V = H$ מקבלים

$$\{U,H\} = \sum_i\left[\frac{\partial U}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial U}{\partial p_i}\dot{p}_i\right]$$

מכאן יוצא

$$\frac{dU}{dt} = \{U,H\} + \frac{\partial U}{\partial t}$$

ספציפית, אם $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ אזי

$$\frac{dH}{dt} = \{H,H\} = 0$$

4.4 טרנספורמציות קנוניות

טרנספורמציה קנונית היא טרנספורמציה מסט אחד של משתנים קנוניים q, p לסט אחר Q, P כך שקיים המילטוניאן $H'(Q, P)$ שמשוואות התנועה במשתנים החדשים הן מהצורה הקנונית

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

ניתן לייצר טרנספורמציה כזאת אם שמים לב שהוספת נגזרת שלמה בזמן של פונקציה F (שתלוייה רק בקורדינטות אבל לא בנגזרותיהן) לאינטגרנד בפעולה לא משנה את משוואות התנועה:

$$S = \int dt\, L \quad \text{is equivalent to} \quad S' = \int dt\ (L + \frac{dF}{dt})$$

ולפיכך המשוואות הקנוניות ישמרו אם

$$p_i\dot{q}_i - H(q,p) = P_i\dot{Q}_i - H'(Q,P) + \frac{dF}{dt}$$

עכשיו,

$$dF = p_i dq_i - P_i dQ_i + [H'(Q,P) - H(q,p)]dt$$

לכן,

$$p_i = \frac{\partial F}{\partial q_i} \quad P_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i} \quad H'(Q,P) = H(q,p) + \frac{\partial F}{\partial t}$$

במקרה זה $F(q, Q)$ היא <u>הפונקציה היוצרת</u> של הטרנספורמציה. ניתן גם לארגן פונקציה יוצרת של טרנספורמציה קנונית שתהיה פונקציה של משתנים אחרים. למשל,

$$\begin{aligned}
dF &= p_i dq_i - P_i dQ_i + [H'(Q,P) - H(q,p)]dt \\
&= p_i dq_i - d(P_i Q_i) + Q_i dP_i + [H'(Q,P) - H(q,p)]dt \\
d(F + P_i Q_i) &= p_i dq_i + Q_i dP_i + [H'(Q,P) - H(q,p)]dt \\
G(q_i, P_i, t) &= F(q_i, Q_i) + P_i Q_i \\
dG &= p_i dq_i + Q_i dP_i + [H'(Q,P) - H(q,p)]dt
\end{aligned}$$

ולכן:

$$p_i = \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad Q_i = \frac{\partial G}{\partial P_i} \quad H'(Q,P) = H(q,p) + \frac{\partial G}{\partial t}$$

ספציפית, הטרנספורמציה שמוגדרת ע"י $G = \sum_i q_i P_i$ היא טרנספורמצית הזהות:

$$p_i = P_i \quad Q_i = q_i$$

4.5 טרנספורמציות קנוניות אינפיניטיזימליות, סימטריה.

טרנספורמציה אינפיניטיזימלית היא כזו אשר קרובה כרצוננו לטרנספורמצית הזהות. היא מוגדרת לפיכך כך:

$$G(q_i, P_i) = \sum q_i P_i + \varepsilon g(q_i, P_i)$$

כאשר ε קטן כרצוננו. הטרנספורמציה היא למעשה:

$$\begin{aligned} P_i &= p_i - \varepsilon \frac{\partial g}{\partial q_i} \\ Q_i &= q_i + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial P_i} \end{aligned}$$

עכשיו ניקח את נקודת המבט של טרנספורמציה אקטיבית, כלומר נביט על הטרנס-פורמציה כאילו היא משנה מעט את הערכים של המשתנים q, p לערכים חדשים:

$$\begin{aligned} p_i &\to p_i - \varepsilon \frac{\partial g}{\partial q_i} \\ q_i &\to q_i + \varepsilon \frac{\partial g}{\partial P_i} \end{aligned}$$

אזי הערך החדש של ההמילטוניאן:

$$H(q,p) \to H + \sum_i \left[\frac{\partial H}{\partial q_i} \varepsilon \frac{\partial g}{\partial P_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i} \varepsilon \frac{\partial g}{\partial q_i} \right] = H - \varepsilon \{g, H\}$$

שימו לב כי

$$\varepsilon \{g(q,P), H\} = \varepsilon \{g(q,p), H\} + O(\varepsilon^2)$$

עכשיו, אם הטרנספורמציה הזו היא סימטריה של ההמילטוניאן, אזי הערך שלו לא משתנה, כלומר

$$\{g, H\} = 0 \Rightarrow \dot{g} = 0$$

כלומר $g(q,p)$ שנקרא "יצרן הטרנספורמציה" הוא גודל נשמר כתוצאה מהסימטרייה.

4.6 יצרני ההזזות

ניקח את המקרה $g(q,P) = \sum_i P_i$. אזי הטרנספורמציה היא:

$$q_i \to q_i + \varepsilon$$

כלומר, אם ההמילטוניאן סימטרי להזזה של כל המערכת בקבוע, אזי

$$g(p) = \sum_i p_i$$

סה"כ התנע נשמר.

עכשיו נביט במקרה $g = H(q,P)$ אזי הטרנספורמציה היא

$$\begin{aligned} p_i &\to p_i - \varepsilon \frac{\partial H}{\partial q_i} = p_i + \varepsilon \dot{p}_i \\ q_i &\to q_i + \varepsilon \frac{\partial H(q_i, P_i)}{\partial P_i} = q_i + \varepsilon \dot{q}_i + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

כלומר, <u>ההמילטוניאן הוא היצרן של ההזזות בזמן</u>. ההמילטוניאן עצמו לא מושפע כי $\{H,H\} = 0$.

4.7 סוגרי פואסון הם אינווריאנטים תחת טרנספורמציות קנוניות

הוכחה פשוטה (של לנדאו) היא בעזרת הטריק הבא: נניח פונקציה $\omega = \omega(q,p)$ שמי־יצגת גודל פיזיקלי כלשהוא. את אותו הגודל ניתן להביע גם בעזרת משתנים קנוניים אחרים, $\omega = \omega(Q,P)$. עכשיו, מאחר וכל המשתנים קנוניים, אזי (נניח שהטרנספורמ־ציה הקנונית לא תלויה בזמן)

$$\dot{\omega} = \{\omega, H\}_{qp} = \{\omega, H\}_{QP}$$

אבל H בעצם שרירותי, ולכן ברור כי

$$\{\omega, \lambda\}_{qp} = \{\omega, \lambda\}_{QP}$$

סוגרי פואסון לפיכך הן דרך להביע דברים כך שלא ישתנו תחת טרנספורמציה קנונית. עכשיו ניתן לכתוב את סוגרי פואסון עבור המשתנים הקנוניים עצמם:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

4.8 הכללים של המכניקה הקלאסית

הכללים של מכניקה קלאסית ניתנים לניסוח פורמלי באופן הבא:

1. מערכת עם N דרגות חופש מתוארת בכל רגע ע"י משתנים קנוניים $q_i,, p_i, i = 1,2,\ldots,N$. המשתנים הקנוניים מקיימים

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0$$

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

2. כל משתנה דינמי הוא פונקציה של המשתנים הקנוניים, $\omega = \omega(q,p)$
3. כאשר המערכת נמצאת במצב q_i, p_i ומבצעים מדידה אידיאלית של המשתנה ω, יתקבל הערך $\omega(q_i, p_i)$.
4. המצב של המערכת משתנה בזמן לפי משוואות המילטון

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

פרק 5

בעיות

5.1 בעיה

תיאור הבעיה

בעית המסה הנעה על מוט: מוט באורך l ועם מסה M תלוי מציר. חיפושית נמצאת על המוט בקצהו, מסתה m. ברגע $t = 0$ המוט אנכי, והמהירות הזוויתית של החיפושית והמוט היא ω_0. ברגע זה, החיפושית מתחילה לטפס במהירות קבועה v_0 במעלה המוט. החיפושית והמוט ממשיכים בתנועתם, עד שהם חוזרים, כעבור זמן t, למצב אנכי. מה הכח שמפעילה החיפושית על המוט ברגע זה, אם ידוע שהחיפושית הגיע בדיוק לאמצע המוט?

פתרון

נפתור בשתי דרכים: בעזרת מכניקה אלמנטרית ובעזרת מכניקה אנליטית. פתרון אלמנטרי:

נניח כי הכוחות בין המוט לחיפושית משמרים, אז הכוחות היחידים שיש הם של הציר שלא עושה עבודה (הנקודה על הציר לא נעה אף פעם) ושל המשקל, שהוא כח משמר. לכן האנרגיה נשמרת.

5.2 בעיה

תיאור הבעיה

תנודות קטנות.

פתרון

יש לנו לגרנג'אן.

$$L = T - V$$

אם הקואורדינטות לא קרטזיות,

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}_i\dot{x}_i \\ \dot{x}_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_j}\dot{q}_j \\ T &= \frac{1}{2}m\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\frac{\partial x_i}{\partial q_k}\dot{q}_j\dot{q}_k \\ &\equiv \frac{1}{2}mF_{ij}(q)F_{ik}(q)\dot{q}_j\dot{q}_k \end{aligned}$$

נניח שזה מלוכסן

$$T = \frac{1}{2}m\sum_j f_j(q)\dot{q}_j^2$$

$$p_j = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} = mf(q)\dot{q}_j$$

דוגמא,

$$x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, z = z$$

במצב כזה

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\left(2\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial r}\dot{\varphi}\dot{r} + \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2\dot{r}^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2\dot{\varphi}^2 + 2\frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r}\dot{\varphi}\dot{r} + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2\dot{r}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(-2r\sin\varphi\cos\varphi\dot{\varphi}\dot{r} + \cos^2\varphi\cdot\dot{r}^2 + r^2\sin^2\varphi\dot{\varphi}^2 + 2r\cos\varphi\sin\varphi\dot{\varphi}\dot{r} + \sin^2\varphi\dot{r}^2 + r^2\cos^2\varphi\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2\right) \end{aligned}$$

כידוע לנו. אם יש לנו תנודות קטנות,

$$V \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right)_0 \Delta q_i \Delta q_j \equiv \frac{1}{2}\tilde{V}(q)\Delta q_i \Delta q_j$$

משוואות התנועה הופכות להיות

$$\frac{d}{dt}\left(mf(q)\dot{q}\right) = -\tilde{V}q$$

אבל אם התנודות קטנות

$$mf(q)\ddot{q} + m\frac{df}{dq}\dot{q}^2 = -\dot{V}q$$

אבל q מתנודד סביב שיווי משקל, לכן $f = f_0 + f''q^2$

פרק 6

מכניקה של גוף קשיח

6.1 תיאוריה

6.1.1 ציר הסיבוב

אנו מביטים בגוף במערכת המעבדה. נניח שיש מערכת אחרת, "מערכת הגוף" או "מערכת B", שממוקמת בתוך הגוף וצמודה לאחת הנקודות שלו. המערכת B מסתובבת ביחד עם הגוף. יהי $\mathbf{R}$ מיקומה של ראשית הצירים של B במעבדה. נסמן ב-$\mathbf{r}_L$ את מיקומה של נקודה P בגוף במערכת המעבדה. אם $\mathbf{r}$ הוא מיקומה של P במערכת B, ברור כי

$$\mathbf{r}_L = \mathbf{R} + \mathbf{r}$$

עכשיו, בזמן dt התנועה היא

$$\mathbf{v}_L = \dot{\mathbf{r}}_L = \mathbf{V} + \mathbf{v}$$

כאשר $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ ו-$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$. מאחר שהגוף קשיח הרי שבהכרח הנקודה P נמצאת באותו מרחק מראשית הצירים של מערכת B אבל בכיוון אחר, זאת אומרת $\mathbf{r}$ הסתובב בסיבוב אינפיניטיסימלי ולכן קיים איזה ω כך ש

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

ולפיכך

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

עכשיו, בחרנו את הראשית של B באופן שרירותי. לפיכך, עבור איזו B' נקבל

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{V}' + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'$$

מצד שני, נניח שאנו מביטים במעבדה על הנקודה $P = B'$, ראשית הצירים של B'. נקבל

$$\mathbf{v}_L(B') = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B'}$$

אבל $\mathbf{v}_L(B') \equiv \mathbf{V}'$ לפיכך

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B'}$$

לפיכך

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B'} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'$$

כלומר

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B'} + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}' \\ \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_{B'}) &= \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}'\end{aligned}$$

אבל $\mathbf{r} - \mathbf{r}_{B'}$ הוא מיקומה של P יחסית לראשית של B' כלומר

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_{B'} = \mathbf{r}'$$

ולכן

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}' &= \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{r}' \\ (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') \times \mathbf{r}' &= 0\end{aligned}$$

אבל $\mathbf{r}'$ שרירותי ולכן

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}'$$

כלומר לא משנה מה מערכת הגוף, יש לו מהירות זוויתית מוגדרת היטב.

6.1.2 אנרגיה קינטית

המהירות של כל נקודה בגוף במערכת המעבדה היא

$$\mathbf{v}_L = \mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

כאשר $\mathbf{V}$ מהירותה של מערכת הגוף. האנרגיה הקינטית היא לפיכך סכום על כל המסות הקטנות מהן מורכב הגוף (אנו משמיטים את האינדקס שרץ על המסות $\sum_a m_a \equiv \sum m$)

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}\sum m\mathbf{v}_L^2 = \frac{1}{2}\sum m\left(\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right)^2 \\ &= \frac{MV^2}{2} + \sum m\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \frac{1}{2}\sum m\left(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\right)^2\end{aligned}$$

כאשר $M = \sum m$ היא מסת הגוף. עכשיו,

$$\begin{aligned}\sum m\mathbf{V} \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) &= \sum m\mathbf{r} \cdot (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}) \\ &= (\mathbf{V} \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \sum m\mathbf{r}\end{aligned}$$

אם נבחר עכשיו את מערכת הגוף להיות במרכז המסה, הרי $\sum m\mathbf{r}=0$ ואז

$$T=\frac{MV^2}{2}+\frac{1}{2}\sum m\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)^2$$

עכשיו

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\right)^2&=\epsilon_{ijk}\omega_j x_k\cdot\epsilon_{ilm}\omega_l x_m\\&=\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm}\omega_j\omega_l x_k x_m\\&=\left(\delta_{jl}\delta_{km}-\delta_{jm}\delta_{kl}\right)\omega_j\omega_l x_k x_m\\&=\left(\delta_{jl}\mathbf{r}^2-x_j x_l\right)\omega_j\omega_l\end{aligned}$$

לפיכך

$$\begin{aligned}T&=\frac{MV^2}{2}+\frac{1}{2}\omega_j\omega_l\sum m\left(\delta_{jl}\mathbf{r}^2-x_j x_l\right)\\&=\frac{MV^2}{2}+\frac{1}{2}\omega_i I_{ij}\omega_j\end{aligned}$$

כאשר

$$I_{ij}=\sum m\left(\delta_{ij}r^2-x_i x_j\right)$$

הוא טנסור ההתמד. גרסה רציפה

$$I_{ij}=\int d^3r\,\rho(\mathbf{r})\left(\delta_{ij}r^2-x_i x_j\right)$$

מקרים פרטיים:

$$\begin{aligned}I_{zz}&=\sum m\left(r^2-z^2\right)=\sum m\left(x^2+y^2\right)\\&=\sum_a m_a\rho_a^2\end{aligned}$$

מומנט ההתמד הפשוט סביב ציר z המוכר לכולנו.

6.1.3 צירים ראשיים

טנסור ההתמד הוא סימטרי, ולכן ניתן ללכסון. לפיכך קיימת מערכת שבה המטריצה שלו אלכסונית וקיימים רק

$$I_{11},I_{22},I_{33}$$

הווקטורים העצמיים של המטריצה מגדירים את הצירים הראשיים של הגוף.

6.1.4 תנע זוויתי

קל להראות שיחסית למרכז המסה (מערכת הגוף) התנע הזוויתי הוא

$$\mathbf{L}=I\boldsymbol{\omega}$$

$$L_i=I_{ij}\omega_j$$

הכיוון של $\mathbf{L}$ אינו הכיוון של ω באופן כללי, אלא רק במקרה ש-ω הוא וקטור עצמי של I_{ij}, כלומר אם הגוף סובב סביב אחד משלושת הצירים הראשיים.

6.2 זוויות אוילר

$$
\begin{aligned}
\omega_1 &= \dot{\varphi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi \\
\omega_2 &= \dot{\varphi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi \\
\omega_3 &= \dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}
\end{aligned}
$$

לנדאו מקבל זאת מ"איסוף" הרכיבים של סיבובים נפרדים של $\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi}$. זה מותר כי אפשר לחבר סיבובים אינפיניטיסימליים (האי-חילופיות של חבורת הסיבובים נעלמת בסדר ראשון).

פרק 7

פורמליזם של מכניקת הקוונטים 1

1. אנו עוסקים במרחב וקטורי מעל המרוכבים, ממימד N.

(א) וקטור במרחב מסומן כך, $|V\rangle$.

(ב) בסיס הוא סט של N וקטורים $|i\rangle, i=1,2,\dots,N$, כך ש

$$\forall|V\rangle\exists v_i : |V\rangle = \sum_i v_i|i\rangle \tag{7.1}$$

ה - v_i נקראים "הרכיבים" או "הקורדינטות" של $|V\rangle$ בבסיס $|i\rangle$. לפיכך, אם הבסיס ידוע אזי

$$|V\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

כלומר ניתן לתאר את $|V\rangle$ כוקטור עמודה.

(ג) מכפלה פנימית היא פונקציה שמקבלת שני וקטורים, $|V\rangle, |W\rangle$ ונותנת מספר מרוכב $\langle V|W\rangle$, ומקיימת כמה תכונות:

i. ליניאריות,

$$\langle V|(a|W\rangle + b|Z\rangle) = a\langle V|W\rangle + b\langle V|Z\rangle$$

ii. מעין סימטריה,

$$\langle V|W\rangle = \langle W|V\rangle^*$$

iii. **וגם**,

$$\begin{aligned} \langle V|V\rangle &\geq 0 \\ \langle V|V\rangle = 0 &\Rightarrow |V\rangle = 0 \end{aligned}$$

(ד) **בסיס אורתונורמלי מקיים**,

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij} \tag{7.2}$$

מעתה נניח תמיד בסיס אורתונורמלי. עכשיו,

$$\begin{aligned} |V\rangle &= \sum_j |j\rangle v_j \\ \langle i|V\rangle &= \sum_j \langle i|j\rangle v_j \\ &= \sum_j \delta_{ij} v_j = v_i \\ \Rightarrow v_i &= \langle i|V\rangle \end{aligned} \tag{7.3}$$

לפיכך,

$$\begin{aligned} \langle W|V\rangle &= \langle W|\sum_j v_j|j\rangle \\ &= \sum_j v_j \langle W|j\rangle \\ &= \sum_j v_j \langle j|W\rangle^* \\ &= \sum_j w_j^* v_j \\ &= \begin{bmatrix} w_1^* & w_2^* & \dots & w_N^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

אנו לפיכך משייכים את הסמלים $\langle V|, |V\rangle$ כך,

$$\begin{bmatrix} v_1^* & v_2^* & \dots & v_N^* \end{bmatrix} \leftrightarrow \langle V|$$

וגם,

$$|V\rangle \leftrightarrow \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

(ה) כלל ההצמדה: נניח משוואה וקטורית

$$|V\rangle = a|W\rangle + b|Z\rangle$$

הרי זה גורר

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v_1^* & v_2^* & \dots & v_N^* \end{bmatrix} = a^*\begin{bmatrix} w_1^* & w_2^* & \dots & w_N^* \end{bmatrix} + b^*\begin{bmatrix} z_1^* & z_2^* & \dots & z_N^* \end{bmatrix}$$

לפיכך אנו רואים כי

$$\langle V| = \langle W|a^* + \langle Z|b^*$$

כלומר כלל ההצמדה הוא "הפוך כל ket ל - bra והצמד כל מספר."

2. אופרטורים:

(א) אופרטור מעביר וקטור אחד לאחר $|W\rangle = \Omega|V\rangle$, ואופרטור ליניארי הוא כזה

$$\Omega(a|V\rangle + b|Z\rangle) = a\Omega|V\rangle + b\Omega|Z\rangle$$

אנו עוסקים רק באופרטורים ליניאריים.

(ב) מכפלת אופרטורים מוגדרת כך:

$$\begin{aligned} |W\rangle &= \Omega|V\rangle \\ |Z\rangle &= \Lambda|W\rangle \\ \Rightarrow |Z\rangle &= \Lambda\Omega|V\rangle \end{aligned}$$

כלומר האופרטור $\Gamma = \Lambda\Omega$ פעולתו היא כזו: הפעל Ω על הארגומנט, והפעל Λ על התוצאה. עכשיו, כפל אופרטורים באופן כללי אינו חילופי. המדד לחוסר החילופיות של שני אופרטורים הוא הקומוטטור (יחס החילוף)

$$[\Omega, \Lambda] = \Omega\Lambda - \Lambda\Omega$$

הוא מקיים (בין היתר)

$$\begin{aligned} [\Omega, \Lambda] &= -[\Lambda, \Omega] \\ [\Omega\Gamma, \Lambda] &= \Omega[\Gamma, \Lambda] + [\Omega, \Lambda]\Gamma \end{aligned}$$

(ג) הצורה $\langle V|W\rangle$ היא מספר. הצורה $|V\rangle\langle W|$ היא אופרטור ליניארי, כי:

$$\begin{aligned}\Omega &\equiv |V\rangle\langle W| \\ \Omega|Z\rangle &= |V\rangle\langle W|Z\rangle \\ \Omega(a|Z\rangle + b|T\rangle) &= a|V\rangle\langle W|Z\rangle + b|V\rangle\langle W|T\rangle \\ &= a\Omega|Z\rangle + b\Omega|T\rangle\end{aligned}$$

(ד) אופרטור הזהות: אנו יודעים כי

$$\begin{aligned}|V\rangle &= \sum_i |i\rangle v_i \\ &= \sum_i |i\rangle\langle i|V\rangle \\ &= \left(\sum_i |i\rangle\langle i|\right)|V\rangle\end{aligned}$$

מכאן שהאופרטור $I = \sum_i |i\rangle\langle i|$ מקיים

$$\forall|V\rangle : I|V\rangle = |V\rangle$$

אופרטור זה נקרא <u>אופרטור הזהות</u>. שימו לב כי הדבר נכון לכל בסיס אורתונורמלי, כלומר בהינתן בסיס אורתונורמלי אחר $|n\rangle$ אזי

$$I = \sum_n |n\rangle\langle n|$$

(ה) כלל הצמדה עם אופרטורים: נניח שוב משוואה,

$$|V\rangle = a|W\rangle + \Omega|Z\rangle$$

מהו $\langle V|$ המתאים ?

$$\langle V| \equiv \langle W|a^* + \langle Z|\Omega^\dagger$$

מאוחר יותר נקשר את $\Omega^\dagger$ ל - Ω.

(ו) אלמנטי מטריצה של אופרטור. מה פירוש "לדעת" את הפעולה של האופר-טור ? אם נתונים לי הרכיבים v_i של $|V\rangle$ בבסיס מסויים, ו -

$$|Z\rangle = \Omega|V\rangle$$

"לדעת" מהו $|Z\rangle$ פירושו לדעת את רכיביו z_i באותו בסיס. עכשיו

$$\begin{aligned} z_i &= \langle i|Z\rangle \\ &= \langle i|\Omega|V\rangle \\ &= \langle i|\Omega\sum_j|j\rangle v_j \\ &= \sum_j\langle i|\Omega|j\rangle v_j \\ &\equiv \sum_j\Omega_{ij}v_j \end{aligned}$$

כלומר בבסיס הזה ה - z_i מתקבלים מ"כפל מטריצות" של המטריצה עם אלמנטים Ω_{ij} בוקטור העמודה עם אלמנטים v_j.

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Omega}\cdot\mathbf{v}$$

בבסיס נתון. שימו לב שאלמנטי המטריצה של Ω תלויים בבסיס שבו מדובר

$$\Omega_{ij} = \langle i|\Omega|j\rangle$$

(ז) עכשיו ניתן לראות בקלות את הקשר בין Ω לבין $\Omega^\dagger$.

$$\begin{aligned} |I\rangle &\equiv \Omega|i\rangle \\ \Rightarrow\langle I| &= \langle i|\Omega^\dagger \\ \langle j|\Omega|i\rangle &= \langle j|I\rangle \\ \langle j|\Omega|i\rangle^* &= \langle I|j\rangle \\ &= \langle i|\Omega^\dagger|j\rangle \end{aligned}$$

כלומר

$$\Omega^\dagger_{ij} = \Omega^*_{ji}$$

כלומר transpose וצמוד. ברור עתה כי

$$(\Omega^\dagger)^\dagger = \Omega$$

כמו כן, (זו טכניקה חשובה)

$$\begin{aligned}
\langle i|(\Omega\Lambda)^\dagger|j\rangle &= \langle j|\Omega\Lambda|i\rangle^* \\
&= \langle j|\Omega I\Lambda|i\rangle^* \\
&= \left[\langle j|\Omega\sum_k |k\rangle\langle k|\Lambda|i\rangle\right]^* \\
&= \sum_k \langle j|\Omega|k\rangle^*\langle k|\Lambda|i\rangle^* \\
&= \sum_k \langle k|\Omega^\dagger|j\rangle\langle i|\Lambda^\dagger|k\rangle \\
&= \sum_k \langle i|\Lambda^\dagger|k\rangle\langle k|\Omega^\dagger|j\rangle \\
&= \langle i|\Lambda^\dagger\left(\sum_k |k\rangle\langle k|\right)\Omega^\dagger|j\rangle \\
&= \langle i|\Lambda^\dagger\Omega^\dagger|j\rangle
\end{aligned}$$

כלומר,

$$(\Omega\Lambda)^\dagger = \Lambda^\dagger\Omega^\dagger$$

(ח) כלל הצמדה גדול: ניקח משוואה כזו:

$$\begin{aligned}
|V\rangle &= a|Z\rangle + \Omega\Lambda|W\rangle \\
\langle V| &= \langle Z|a^* + \langle W|(\Omega\Lambda)^\dagger \\
&= \langle Z|a^* + \langle W|\Lambda^\dagger\Omega^\dagger
\end{aligned}$$

(ט) אופרטורים הופכיים, הרמיטיים ואוניתריים:

i. אם קיימים Λ, Ω כך ש -

$$\Lambda\Omega = \Omega\Lambda = I$$

אזי מסמנים $\Lambda = \Omega^{-1}, \Omega = \Lambda^{-1}$, והם הופכיים אחד של השני.

ii. אופרטור נקרא הרמיטי אם המטריצה שלו הרמיטית, כלומר אם

$$\Omega = \Omega^\dagger$$

iii. אופרטור אוניתרי הוא כזה שמקיים

$$\Omega\Omega^\dagger = I$$

3. לכסון:

(א) ע"ע וו"ע של אופרטור מוגדרים ע"י המשוואה

$$\Omega|V\rangle = k|V\rangle$$

כלומר, אם זה מתקיים אזי $|V\rangle$ נקרא ו"ע של Ω עם ע"ע k. עכשיו, ו"ע מוגדר עד כדי קבוע כפלי. לכן תמיד ניתן לבחור את הו"ע כך שיהיו מנורמלים, כלומר

$$\langle V|V\rangle = 1$$

(ב) דוגמא של לכסון מטריצה עם ניוון:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} &= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \\
(\mathbf{M} - k\mathbf{I}) \cdot \mathbf{v} &= 0 \\
\det(\mathbf{M} - k\mathbf{I}) &= 0 \\
\begin{vmatrix} 4-k & 1 & 0 \\ 1 & 4-k & 0 \\ 0 & 0 & 5-k \end{vmatrix} &= (5-k)[(4-k)^2 - 1] = 0 \\
k &= 5, 5, 3
\end{aligned}$$

כלומר יש לנו ניוון, ע"ע מופיע יותר מפעם אחת. עבור $k = 3$

$$\begin{aligned}
\mathbf{M} - 3\mathbf{I} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} &= 0 \\
z = 0 \quad , \quad & y = -x \\
\Rightarrow |k = 3\rangle &= \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

עבור $k=5$ יש לנו

$$\mathbf{M}-5\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$$

$$x=y \quad , \quad z=\text{anything}$$

יש לנו שתי דרגות חופש, לבחור את x ולבחור את z. נבחר אותם כך שיהיו אורתוגונלים.

$$|k=5,a\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad |k=5,b\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

and after normalization

$$|k=5,a\rangle = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad , \quad |k=5,b\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

כל קומבינציה ליניארית של אלה תהיה גם ו"ע עם $k=5$.

(ג) נהוג לסמן ו"ע לפי הע"ע שלו, כלומר

$$\Omega|\omega\rangle = \omega|\omega\rangle$$

(ד) ע"ע של אופרטור הרמיטי הם ממשיים.

(ה) ו"ע של אופרטור הרמיטי הם בסיס אורתונורמלי

$$\begin{aligned} \Omega|\omega\rangle &= \omega|\omega\rangle \\ \langle\omega'|\omega\rangle &= \delta_{\omega',\omega} \end{aligned}$$

(ו) ע"ע של אופרטור אוניתרי z הם בעלי גודל 1, $|z|=1$.

(ז) ו"ע של אופרטור אוניתרי עם ע"ע שונים הם אורתוגונליים.

(ח) אופרטור הרמיטי/אוניתרי נראה אלכסוני בבסיס של עצמו. כלומר, עבור למשל אופרטור הרמיטי

$$\begin{aligned} \Omega|\omega_n\rangle &= \omega_n|\omega_n\rangle \\ \Omega_{nm} &= \langle\omega_n|\Omega|\omega_m\rangle \\ &= \omega_m\langle\omega_n|\omega_m\rangle \\ &= \omega_m\delta_{nm} \end{aligned}$$

(ט) אם $[\Omega, \Lambda] = 0$ אזי ניתן ללכסן את שניהם בו-זמנית. נניח ש Ω לא מנוון. אזי

$$\begin{aligned} \Omega|\omega\rangle &= \omega|\omega\rangle \\ \Omega\Lambda|\omega\rangle &= \Lambda\Omega|\omega\rangle \\ &= \Lambda\omega|\omega\rangle \\ &= \omega\Lambda|\omega\rangle \\ \Rightarrow \Lambda|\omega\rangle &= \lambda_\omega|\omega\rangle \end{aligned}$$

לפיכך, המטריצה של Λ בבסיס של Ω הינה

$$\begin{aligned} \langle\omega'|\Lambda|\omega\rangle &= \lambda\langle\omega'|\omega\rangle \\ &= \lambda_\omega\delta_{\omega',\omega} \end{aligned}$$

כלומר אלכסונית עם איברים λ_ω באלכסון (אולי לא כולם שונים).
לעומת זאת, אם Ω מנוון, כלומר

$$\begin{aligned} \Omega|\omega,\alpha\rangle &= \omega|\omega,\alpha\rangle, \alpha = 1, 2, \ldots, n_\omega \\ \Omega\Lambda|\omega,\alpha\rangle &= \Lambda\Omega|\omega,\alpha\rangle \\ &= \omega\Lambda|\omega,\alpha\rangle \\ \Rightarrow \Lambda|\omega,\alpha\rangle &= \sum_\beta c_{\beta\alpha}|\omega,\beta\rangle \end{aligned}$$

כלומר, במקרה זה לפחות Λ מלוכסן בלוקים בבסיס של Ω:

$$\langle\omega,\alpha|\Lambda|\omega',\beta\rangle = c_{\alpha\beta}\delta_{\omega,\omega'}$$

כלומר

$$\Lambda \leftrightarrow \begin{bmatrix} \omega_1\left\{\begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}\right. & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2\left\{\begin{matrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{matrix}\right. & 0 \\ 0 & 0 & \omega_3\{\square \end{bmatrix}$$

4. פתרון בעיה במכניקה קלאסית, אם יש זמן.

פרק 8

פורמליזם של מכניקת הקוונטים 2

פרק 9

תיאוריה של מכניקת הקוונטים

למה יש i במשוואת שרדינגר? בפרק זה אני מייצר סינתזה של רעיונות שלי (המיעוט) ביחד עם התיאוריה שנמצאת אצל לנדאו[4] ודיראק[1].

9.1 תיאוריה כללית

בניגוד ליחס למשל בין מכניקה יחסותית למכניקה ניוטונית, המכניקה הקלאסית היא אמנם גבול של המכניקה הקוונטית, אבל המכניקה הקוונטית מנוסחת בעזרת המכניקה הקלאסית. כלומר, אני חייב להבין מכניקה קלאסית כדי להגדיר מכניקה קוונטית.

ניסוי ההתאבכות של האלקטרונים מדגים כי לעצמים מיקרוסקופיים, אין מסלול. אם מניחים שלאלקטרון יש מסלול מסויים, פשוט לא ניתן להסביר את התוצאות. זו המהות של האקראיות של תוצאת מדידת הקואורדינטות של אלקטרון. אם מודדים את המקום שלו במרווחי זמן קטנים מאוד, אזי התוצאות תהינה קרובות זו לזו, אבל מפוזרות באופן אקראי בתחום קטן. לפיכך אין גבול $\frac{dx}{dt}$, כלומר אין לאלקטרון מהירות במובן הקלאסי (מכיוון שאם היה מיקום ומהירות, אזי היה מסלול, ואין מסלול לאלקטרון, כזכור.)

9.1.1 מדידה היא אינטראקציה עם עצם קלאסי

זה ברור, אם כן, שכדי ליחס לאלקטרון תכונות שאנו מבינים, כמו אנרגיה, מהירות, תנע, וכולי, עליו לבוא באינטראקציה עם איזה עצם "קלאסי", והשינוי במצבו של העצם הקלאסי הוא הוא שמגדיר את הגדלים הפיזיקליים של האלקטרון.

תהליך כזה נקרא בפינו "מדידה" אבל הוא לאו דוקא מלמד על צופה. מדובר על אינטראקציה בין עצמים קלאסיים לעצמים קוונטיים.

יש מדידות משני סוגים:

1. מדידה שעבורה קיים מצב של האלקטרון שמוליך בוודאות לתוצאה מסויימת.
2. מדידה שעבורה לא קיים מצב כזה.

המאפינים הכמותיים של מדידות מהסוג הראשון, הם מה שנקרא גדלים פיזיקליים. כאשר האלקטרון נמצא במצב שבו מדידה מסוג 1 נותנת בוודאות ערך מסויים ω של איזה גודל פיזיקלי, אזי נאמר שלגודל הזה יש ערך ω.

9.1.2 עיקרון הסופרפוזיציה

מתוך הניסוי של התאבכות האלקטרונים, אנו מקבלים מוטיבציה להגדיר את המצב של אלקטרון דרך פונקציה $\psi(x)$ שמתארת את צפיפות ההסתברות שלו להמצא במ-קום מסויים, $|\psi(x)|^2dx$. הדרך להסביר את ההתאבכות היא להניח שהאלקטרונים בניסוי עם שני החריצים פתוחים נמצאים במצב שהפונקציה שלו היא סופרפוזיציה של הפונקציות של המצבים מהניסוי עם חריץ אחד סגור,

$$\psi(x) = a\psi_1(x) + b\psi_2(x)$$

ובצורה זו ההסתברות החדשה היא לא סכום ההסתברויות וכולי. נקבל זאת כעיקרון כללי. עכשיו, ראינו כי ניתן לייצג פונקציות כוקטורים במרחב,

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$$

ההסתברות היא

$$|\psi(x)|^2 \quad = \quad |a|^2|\psi_1|^2 + |b|^2|\psi_2|^2 + ab^*\psi_1\psi_2^* + a^*b\psi_1^*\psi_2$$

זה מצד שני

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle \\ \langle\psi|x\rangle\langle x|\psi\rangle &= (\langle\psi_1|a^* + \langle\psi_2|b^*)|x\rangle\langle x|(a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) \end{aligned}$$

כלומר הסתברות המדידה של x במצב $|\psi\rangle$ כרוכה באופרטור הליניארי

$$M_x \equiv |x\rangle\langle x|$$

9.1.3 ממוצעים ואופרטורים, או אופרטורים וממוצעים

ההכללה היא שההסתברות לתוצאה של מדידה כלשהיא ω היא תמיד מהצורה הזו, כלומר

$$\langle\psi|M_\omega|\psi\rangle \tag{9.1}$$

כאשר

$$M_\omega = |\omega\rangle\langle\omega|$$

אמרנו שגודל פיזיקלי הוא כזה שיש מצבים שמוליכים בודאות לקבלת ערך מסויים שלו במדידה. לפיכך עבור גודל פיזיקלי Ω נייצג ע"י $|\omega\rangle$ את המצב שבו יש למשתנה Ω את הערך ω.

עכשיו נניח הנחה חשובה:
גודל מדיד הוא כזה, שהמצבים שבהם הוא מוגדר, $|\omega\rangle$ הם סט שלם.
עכשיו נניח שהמצב של המערכת הוא מצב שמוליך בודאות לערך ω. ההסתברות לקבלת הערך ω' היא לפיכך אפס, ומצד שני שווה לפי נוסחא (9.1)

$$0 = \langle\omega|M_{\omega'}|\omega\rangle = \langle\omega|\omega'\rangle\langle\omega'|\omega\rangle = |\langle\omega'|\omega\rangle|^2$$

מצד שני מאותו טיעון ברור כי

$$|\langle\omega|\omega\rangle|^2 = 1$$

למעשה זה אומר כי ה - $|\omega\rangle$ הם בסיס אורתונורמלי.
נניח כי מבצעים הרבה ניסויים, הממוצע של המדידות של Ω יהיה

$$\bar{\Omega} = \sum_\omega P(\omega)\omega = \sum_\omega |\langle\psi|\omega\rangle|^2\omega = \sum_\omega \langle\psi|\omega\rangle\omega\langle\omega|\psi\rangle$$

כלומר

$$\bar{\Omega} \quad = \quad \langle\psi|\left[\sum_\omega |\omega\rangle\langle\omega|\omega\right]|\psi\rangle$$

נגדיר את האופרטור הליניארי

$$\Omega = \sum_\omega |\omega\rangle\langle\omega|\omega$$

שמכיל את כל האינפורמציה על הגודל הפיזיקלי Ω. הממוצע, ניתן ע"י

$$\langle\Omega\rangle = \langle\psi|\Omega|\psi\rangle$$

כך, מתוך ההנחה של סופרפוזיציה של מצבים, של גדלים פיזיקליים שמוגדרים ע"י מצבים, הגענו למסקנה כי *לכל גודל פיזיקלי מתאים אופרטור ליניארי.*
לגודל *ממשי* מתאים אופרטור *הרמיטי*. בדיעבד, גדלים מרוכבים הם לא אפשריים, כי לא ניתן באופן כללי לציין שני גדלים ממשיים בו זמנית.

9.2 מדידות

הכללים עד עתה הם כדלקמן

1. המצב של המערכת מיוצג ע"י וקטור $|\psi\rangle$.
2. משתנים דינמיים מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים, Ω. במדידה ניתן לקבל את אחד הערכים העצמיים ω של Ω. ההסתברות לתוצאה זו כאשר המערכת נמצאת במצב $|\psi\rangle$ היא

$$P(\omega) = |\langle\omega|\psi\rangle|^2$$

מדידה אידאלית תהיה כזו שאם נמדוד δt אחר כך שוב, נקבל סטייה מהערך הקודם שהולכת לאפס ביחד עם δt. מצד שני זה אומר כי "מיד" לאחר המדידה של Ω, ניתן ליחס לו את הערך ω שנמדד, כלומר המצב של המערכת הפך להיות

$$|\omega\rangle$$

זה מוסיף לנו כלל:

1. אם התקבל הערך ω במדידה של המשתנה Ω, אזי המצב של המערכת מיד לאחר המדידה הוא $|\omega\rangle$. זה נקרא הקריסה של פונקצית הגל.

9.3 יחסי החילוף - אנלוגיה עם מכניקה קלאסית

כיצד אנו יודעים איזה אופרטור מתאים לגודל פיזיקלי מסויים? יש דרך להגיע לתובנה מסויימת בעזרת סוגרי פואסון.

את המכניקה הקלאסית ניתן לנסח לחלוטין בעזרת סוגרי פואסון

$$\{\omega, \lambda\} = \sum_n \left[\frac{\partial\omega}{\partial x_n}\frac{\partial\lambda}{\partial p_n} - \frac{\partial\omega}{\partial p_n}\frac{\partial\lambda}{\partial x_n}\right]$$

יש להם תכונה חשובה,

$$\{\omega\gamma, \lambda\} = \omega\{\gamma, \lambda\} + \{\omega, \lambda\}\gamma \tag{9.2}$$

$$\{\omega, \lambda\sigma\} = \{\omega, \lambda\}\sigma + \lambda\{\omega, \sigma\} \tag{9.3}$$

אנו מחפשים עכשיו סוגר פואסון קוונטי, שיעבוד בין שני אופרטורים (שמייצגים גדלים פיזיקליים). נניח שהסוגר הקוונטי מקיים את התכונות האלגבריות של סוגרי פואסון. אם כך, נשתמש פעם בנוסחא (9.2) ופעם בנוסחא (9.3),

$$\begin{aligned}
\{QR, ST\} &= Q\{R, ST\} + \{Q, ST\}R \\
&= Q[\{R,S\}T + S\{R,T\}] + [\{Q,S\}T + S\{Q,T\}]R \\
&= Q\{R,S\}T + QS\{R,T\} + \{Q,S\}TR + S\{Q,T\}R \\
\{QR, ST\} &= \{QR, S\}T + S\{QR, T\} \\
&= [Q\{R,S\} + \{Q,S\}R]T + S[Q\{R,T\} + \{Q,T\}R] \\
&= Q\{R,S\}T + \{Q,S\}RT + SQ\{R,T\} + S\{Q,T\}R
\end{aligned}$$

נשווה את שתי התוצאות

$$\begin{aligned}
Q\{R,S\}T + \{Q,S\}RT + SQ\{R,T\} + S\{Q,T\}R &= Q\{R,S\}T + QS\{R,T\} + \{Q,S\}TR + S\{Q,T\}R \\
\{Q,S\}RT + SQ\{R,T\} &= QS\{R,T\} + \{Q,S\}TR \\
\{Q,S\}(RT - TR) &= (QS - SQ)\{R,T\} \qquad (9.4)
\end{aligned}$$

עכשיו, כל האופרטורים האלה הם כלליים לגמרי ובלתי תלויים. לפיכך חייב להתקיים

$$\begin{aligned}
RT - TR &= \alpha\{R,T\} \\
QS - SQ &= \alpha\{Q,S\} \qquad (9.5)
\end{aligned}$$

כאשר α קבוע מספרי. אם זה נכון אזי משוואה (9.4) מתקיימת באופן טריביאלי.

$$\alpha\{Q,S\}\{R,T\} = \alpha\{Q,S\}\{R,T\}$$

אם כן הגענו למסקנה כי הסוגר פואסון פרופורציוני לקומוטטור. עכשיו, משיקולי מימדים

$$\begin{aligned}
\{Q,S\} &\sim [Q][S]/[x][p] \\
QS - SQ &\sim [Q][S] \\
\Rightarrow \alpha\frac{[Q][S]}{[x][p]} &\sim [Q][S] \\
\alpha &\sim [x][p] = \text{energy} \cdot \text{time}
\end{aligned}$$

עכשיו, Q,S הרמיטיים, ואילו

$$(QS-SQ)^\dagger = (QS)^\dagger - (SQ)^\dagger = S^\dagger Q^\dagger - Q^\dagger S^\dagger = SQ - QS = -(QS-SQ)$$

הוא אנטיהרמיטי. בהנחה שסוגר הפואסון הקוונטי הוא הרמיטי (מתאים לסוגר פואסון ממשי), מתחייב

$$\begin{aligned}
QS - SQ &= \alpha\{Q,S\} \\
(QS-SQ)^\dagger &= \alpha^*\{Q,S\}^\dagger = \alpha^*\{Q,S\} \\
SQ - QS &= \alpha^*\{Q,S\}
\end{aligned}$$

אבל מצד שני לפי נוסחא (9.5)

$$SQ - QS = \alpha\{S,Q\}$$

אבל מהתכונות של סוגרי פואסון $\{Q,S\} = -\{S,Q\}$ ולכן

$$\alpha\{S,Q\} = -\alpha^*\{S,Q\}$$

אבל, שוב האופרטורים S,Q שרירותיים ולכן

$$\alpha = -\alpha^*$$

כלומר

$$\alpha = i\hbar$$

כאשר $\hbar$ ממשי ובעל יחידות של פעולה.

עכשיו, נניח הנחה אחת נוספת: <u>סוגרי פואסון הקוונטיים הפשוטים ביותר, שווים לאלה מהמכניקה הקלאסית.</u>

לפיכך

$$XP - PX = i\hbar$$

מאנלוגיה עם המכניקה הקלאסית, הסקנו את יחס החילוף בין מקום לתנע. כדי שהת-יאוריה תתאים לניסוי צריך לבחור

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

כאשר h הוא קבוע פלנק.

9.4 כמעט כל הכללים של מכניקת הקוונטים

עכשיו אנחנו יודעים (כמעט) הכל.

1. המצב של המערכת מיוצג ע"י וקטור $|\psi\rangle$.

2. משתנים דינמיים מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים, Ω. אם בפיזיקה קלאסית המשתנה $\omega(x,p)$ הוא פונקציה של המקום והתנע, אזי האופרטור המתאים לו הוא פונקציה של האופרטורים X,P המקיימים את יחס החילוף $[X,P]=i\hbar$. בבסיס X ניתן להשיג זאת ע"י

$$X \to x, P \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

במדידה ניתן לקבל את אחד הערכים העצמיים ω של Ω. ההסתברות לתוצאה זו כאשר המערכת נמצאת במצב $|\psi\rangle$ היא

$$P(\omega) = |\langle\omega|\psi\rangle|^2$$

3. אם התקבל הערך ω במדידה של המשתנה Ω, אזי המצב של המערכת מיד לאחר המדידה הוא $|\omega\rangle$. זה נקרא <u>הקריסה של פונקציית הגל</u>.

9.5 משוואת התנועה

חסרה לנו עדיין חתיכה אחת בפאזל. איך המצב של המערכת משתנה בין מדידה למדידה עם הזמן t ? כדי שעיקרון הסופרפוזיציה יהיה תקף בכל זמן, ברור כי המצב בזמן t צריך להתקבל מהמצב בזמן $t=0$ ע"י אופרטור ליניארי $U(t)$ כך

$$|\psi(t)\rangle = U(t)|\psi(0)\rangle \tag{9.6}$$

כמו כן, סה"כ ההסתברות לקבל תוצאה כלשהיא

$$\sum_\omega P(\omega) = \sum_\omega |\langle\omega|\psi\rangle|^2 = \sum_\omega \langle\psi|\omega\rangle\langle\omega|\psi\rangle = \langle\psi|\left[\sum_\omega |\omega\rangle\langle\omega|\right]|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

צריכה להיות תמיד 1 בלי תלות בזמן. לכן

$$\begin{aligned}\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle &= \langle\psi(0)|U^\dagger U|\psi(0)\rangle \\ U^\dagger U &= 1\end{aligned}$$

כלומר U אופרטור אוניתרי בהכרח. משוואת התנועה תהיה מהצורה

$$\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \frac{dU(t)}{dt}|\psi(0)\rangle$$

נניח שהנגזרת קיימת, אזי עבור זמן אינפיניטיזימלי ϵ

$$U(t+\epsilon) = U(t) + \epsilon T$$

כאשר T אופרטור. עכשיו:

$$\begin{aligned} 1 = U^\dagger(t+\epsilon)U(t+\epsilon) &= (U^\dagger + \epsilon T^\dagger)(U + \epsilon T) \\ &= 1 + U^\dagger \epsilon T + \epsilon T^\dagger U + O(\epsilon^2) \\ U^\dagger T &= -T^\dagger U \\ \Rightarrow T &= -UT^\dagger U \\ T(0) &= -T^\dagger(0) \end{aligned}$$

הנגזרת של האופרטור הזה היא לפיכך אופרטור אנטי הרמיטי. ניתן לכתוב אותו כך

$$T(0) = -iH(0)/\hbar$$

כאשר ל - H יש יחידות של אנרגיה.

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle\bigg|_{t=0} = H(0)|\psi(0)\rangle$$

מאחר שהרגע $t=0$ שרירותי, הגענו למסקנה כי

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$

נשאלת השאלה מהו H ? מתוך נוסחא (9.6) ניתן לרשום

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{dU(t)}{dt}|\psi(0)\rangle &= H(t)U(t)|\psi(0)\rangle \\ i\hbar\frac{dU}{dt} &= HU \end{aligned}$$

פתרון פורמלי לכך נקבל ע"י ההנחה ש H לא תלוי בזמן.

$$U(t) = e^{iHt/\hbar}$$

אופרטור זה מקיים את המשוואה ואת תנאי ההתחלה. עכשיו האופרטור $U(t)$ מזיז את פונקצית הגל בזמן, והוא מהצורה $e^{iHt/\hbar}$. כמו כן, ראינו בשיעורי הבית שהאופרטור

$$P \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

הוא "יצרן ההזזות", דהיינו $e^{iPa/\hbar}$ מזיז את פונקצית הגל במרחב. לפיכך H הוא יצרן ההזזות בזמן. הגודל הקלאסי האנלוגי הוא האנרגיה. לפיכך, ע"י אנלוגיה עם המכניקה הקלאסית: <u>H הוא האנרגיה של המערכת</u>.

מאחר שאנו יודעים את יחסי החילוף בין X, P, עדיף לנו לכתוב את האנרגיה במונחי X, P, כלומר <u>H הוא ההמילטוניאן</u>.

9.6 הכללים של המכניקה הקוונטית

1. המצב של המערכת מיוצג ע"י וקטור $|\psi\rangle$.

2. משתנים דינמיים מיוצגים ע"י אופרטורים הרמיטיים, Ω. אם בפיזיקה קלאסית המשתנה $\omega(x,p)$ הוא פונקציה של המקום והתנע, אזי האופרטור המתאים לו הוא פונקציה של האופרטורים X, P המקיימים את יחס החילוף $[X,P]=i\hbar$. בבסיס X ניתן להשיג זאת ע"י

$$X \to x, P \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$$

במדידה ניתן לקבל את אחד הערכים העצמיים ω של Ω. ההסתברות לתוצאה זו כאשר המערכת נמצאת במצב $|\psi\rangle$ היא

$$P(\omega) = |\langle\omega|\psi\rangle|^2$$

3. אם התקבל הערך ω במדידה של המשתנה Ω, אזי המצב של המערכת מיד לאחר המדידה הוא $|\omega\rangle$. זה נקרא <u>הקריסה של פונקצית הגל</u>.

4. מצב המערכת משתנה בזמן לפי המשוואה

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

כאשר H הוא אופרטור האנרגיה, ההמילטוניאן.

פרק 10

על הנגזרות החלקיות ו"תלות מפורשת"

מטרת פרק זה לבאר סוגיות מסויימות של נגזרות חלקיות שפעמים רבות לא מדקדקים בהן בשיעורי הפיזיקה באוניברסיטה. לצורך הדיון כאן אני מזכיר כי $\mathbb{R}$ היא קבוצת המספרים הממשיים. כמו כן, כאשר יש לנו שתי קבוצות A, B ניתן ליצור מהן קבוצה חדשה, המכפלה הקרטזית $A \times B$ שהיא קבוצת הזוגות הסדורים (כלומר יש חשיבות לסדר),

$$A \times B = \{(a,b)|a \in A, b \in B\}$$

בהתאם להגדרה זו, אנו מסמנים ב-$\mathbb{R}^2$ את קבוצת כל הזוגות הסדורים של מספרים ממשיים:

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a,b)|a,b \in \mathbb{R}\}$$

והיא גם למעשה קבוצת הוקטורים הדו-מימדיים. קבוצת הוקטורים התלת-מימדיים היא $\mathbb{R}^3$.

10.1 מה הבעיה בעצם?

10.1.1 דוגמא מתרמודינמיקה

כידוע,

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

כלומר

$$P = -\frac{\partial U}{\partial V}$$

עכשיו, עבור גז אידאלי

$$U = \frac{3}{2} N k_B T$$

לכאורה $\frac{\partial U}{\partial V} = 0$, כלומר $P = 0$, למרות שלגז האידאלי יש לחץ.

כמו כן, לגבי אותו גז אידאלי ידוע כי

$$PV = N k_B T$$

כלומר

$$U = \frac{3}{2} PV$$

ואז מקבלים

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{3}{2} P$$

אז מה קיבלנו, $-P = \frac{3}{2}P$? ברור שמשהו כאן ממש לא בסדר.

10.1.2 דוגמא ממכניקה

נאמר כי יש לנו אוסצילטור הרמוני, עם לגרנז'יאן

$$L = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2$$

משוואות התנועה הן כידוע,

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = 0$$

כאשר אנו גוזרים את L לפי $x, \dot{x}$ כאילו הם משתנים בלתי-תלויים. אבל הרי $\dot{x} = dx/dt$, כלומר $\dot{x}$ נקבע לחלוטין ע"י x, אז <u>למה מתייחסים אליהם כאילו הם בלתי-תלויים?</u>

דוגמא אחרת באותו עניין: אנו אומרים שהאנרגיה נשמרת, מאחר שהלגרנז'יאן לא תלוי מפורשות בזמן, כלומר

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0 \tag{10.1}$$

מצד שני, נניח שאנו רוצים לחשב את הפעולה,

$$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} L(x, \dot{x}) dt$$

ברור הרי, שעלינו להעריך את $L(t) = L(x(t), \dot{x}(t))$ כפונקציה של הזמן כדי לבצע את האינטגרל. אז L הוא פונקציה של הזמן או לא? במילים אחרות, ברור שאנו יכולים

לרשום את

$$
\begin{aligned}
x &= A\cos\omega t \\
L &= \frac{m}{2}\dot{x}^2(t) - \frac{k}{2}x^2(t) \\
&= \frac{m\omega^2 A^2 \sin^2\omega t - kA^2\cos^2\omega t}{2} \\
&= \frac{kA^2 \sin^2\omega t - kA^2\cos^2\omega t}{2} \\
&= \frac{kA^2}{2}(\sin^2\omega t - \cos^2\omega t) \\
&= -\frac{kA^2}{2}\cos 2\omega t
\end{aligned}
$$

וזו פונקציה של הזמן, וברור כי

$$\frac{\partial L(t)}{\partial t} = -k\omega A^2 \sin 2\omega t \neq 0$$

אז $\frac{\partial L}{\partial t}$ הוא אפס, או לא?

מה שקרה כאן קרה כרגיל, בגלל חוסר דיקדוק. למעשה, הסמל $\frac{\partial L}{\partial t}$ הוא רב-משמעי בשביל הפיזיקאי המצוי. אפשר להרשות סמלים רב-משמעיים במתמטיקה אם ורק אם רב-המשמעות מסולקת ע"י קונבנציות ברורות. אחרת, ברור שסמל רב-משמעי הוא מתכון בטוח לאסון.

10.2 אותו גודל פיזיקלי מתואר ע"י פונקציות שונות

פונקציה צריכה להיות מוגדרת היטב. המתמטיקאים מקפידים על כך, ובצדק. פונקציה הוא התאמה מקבוצה אחת A לקבוצה אחרת B,

$$f : A \to B$$

כך שלכל $a \in A$ מותאם מספר מסויים $b \in B$ על-ידי הפונקציה, ואז אנו רושמים

$$b = f(a)$$

כידוע, אם יש לנו שתי פונקציות $f : A \to B$ ו-$g : B \to C$, אזי ניתן לבנות את הפונקציה

$$g \circ f : A \to C$$

אשר מתאימה לכל $a \in A$ איבר $c \in C$ לפי הכלל

$$c = g(f(a))$$

נחזור לפיזיקה: האנרגיה הפוטנציאלית של שני מטעני יחידה (שווים ל-1), שנמצאים ב-x_1, x_2[1] היא כידוע

$$U(x_1, x_2) = \frac{1}{|x_1 - x_2|}$$

מצד שני, אם מגדירים את $r = |x_1 - x_2|$, אפשר גם לרשום

$$U(r) = \frac{1}{r}$$

ופעמים הרבה אנו אומרים "U היא פונקציה של $|x_1 - x_2|$ בלבד", והכוונה היא בדיוק למשוואה שלעיל. למעשה, יש כאן כמה וכמה פונקציות שונות לחלוטין.

אחת מהן היא

$$F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$F_1(x) = \frac{1}{x}$$

השנייה היא

$$F_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$F_2(x_1, x_2) = \frac{1}{|x_1 - x_2|}$$

יש לה שני משתנים שכל אחד מהם הוא מספר ממשי (ששייך ל-$\mathbb{R}$). הפונקציה השלישית היא

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \alpha(x) = |x|$$

והרביעית היא

$$\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad \beta(x_1, x_2) = x_1 - x_2$$

עכשיו, בעצם

$$F_2 = F_1 \circ \alpha \circ \beta$$

מאחר ש-

$$\begin{aligned} F_1(\alpha(\beta(x_1, x_2))) &= F_1(\alpha(x_1 - x_2)) \\ &= F_1(|x_1 - x_2|) \\ &= \frac{1}{|x_1 - x_2|} \equiv F_2(x_1, x_2) \end{aligned}$$

בפיזיקה, כאשר אנו רושמים

$$U = \frac{1}{|x_1 - x_2|}$$

[1] אנו נסתפק כאן במימד אחד לשם הפשטות.

אנו לא מקפידים בדרך כלל על ההבדלה בין $U = F_2(x_1, x_2)$, שאז

$$U : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

ובין $U = F_1(r)$, שאז

$$U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

מה שמשותף לשתי הפונקציות, הוא ששתיהן מובילות אל אותו המספר הממשי, שהוא האנרגיה הפוטנציאלית. אלא שמבחינה מתמטית אלה הן שתי פונקציות שונות לגמרי. לגבי F_1, יש לה ארגומנט אחד, וניתן לפיכך לגזור אותה רק לפיו ולקבל את הנגזרת $dF_1(x)/dx$. יש לה רק נגזרת שלמה, ואין נגזרות חלקיות.

הפונקציה F_2 לעומת זאת, היא פונקציה של שני משתנים וקטוריים, וניתן לגזור אותה לפי כך אחד מהם ולקבל את $\frac{\partial}{\partial x_1}F_2(x_1, x_2)$ ואת $\frac{\partial}{\partial x_2}F_2(x_1, x_2)$ וכן הלאה. יש לה נגזרות חלקיות בלבד. כאשר אנו רושמים

$$\frac{dU}{dr}$$

אנו מתכוונים "קשר את U אל r דרך הפונקציה F_1, וגזור לפי r נגזרת שלמה". כאשר אנו רושמים

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}$$

אנו מתכוונים "קשר את U אל x_1, x_2 דרך $F_2(x_1, x_2)$ וגזור אותה חלקית לפי x_1".

10.3 ביקור חוזר אצל הלגרנז'יאן

נניח שיש לנו שוב את הלגרנז'יאן $L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$. הכוונה היא, ולכן רושמים זאת $L(x, \dot{x})$, כי למעשה קיימת פונקציה

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad F(\xi, \eta) = \frac{m\eta^2}{2} - \frac{k\xi^2}{2}$$

ועכשיו, הערכים הספציפיים שאנו מציבים הם $\xi = \dot{x}, \eta = x$. לפיכך הנגזרות של L מוגדרות כך,

$$\frac{\partial L}{\partial x} \equiv \left.\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \xi}\right|_{\xi = x, \eta = \dot{x}}$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \equiv \left.\frac{\partial F(\xi, \eta)}{\partial \eta}\right|_{\xi = x, \eta = \dot{x}}$$

ולכן אין ספק כי

$$\frac{\partial L}{\partial x} = k\xi|_{\xi = x} = kx$$
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\eta|_{\eta = \dot{x}} = m\dot{x}$$

מה לגבי $\frac{\partial L}{\partial t}$? ובכן, $L(x,\dot{x})$ הוא בעצם פונקציה של שני משתנים בלבד. אם נגדיר אותו "בכח" כפונקציה של שלושה משתנים,

$$L(x,\dot{x},t) = F(\xi,\eta,\tau)|_{\xi=x,\eta=\dot{x},\tau=t}$$

אזי במקרה שלנו ברור כי

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial t} &\equiv \left.\frac{\partial F(\xi,\eta,\tau)}{\partial \tau}\right|_{\tau=t} \\ &= \left.\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{m\eta^2}{2} - \frac{k\xi^2}{2}\right)\right|_{\tau=t} \\ &= 0|_{\tau=t} = 0\end{aligned}$$

ולכן גם אומרים ש-L לא תלוי ב-t "באופן מפורש". הכוונה היא לצורה של $L(x,\dot{x},t)$ כפונקציה של הארגומנטים שלו, כלומר לצורה של $F(\xi,\eta,\tau)$.

אם עכשיו אנו מוסיפים אינפורמציה ששני המשתנים מקבלים ערכים מתוך פונקציות מסויימות של משתנה נוסף, t, אזי אנו מגדירים פונקציה חדשה, $L(t)$ ע"י הרכבת פונקציות, ז"א:

$$\begin{aligned}L(t) &= L(x(t),\dot{x}(t),t) \\ &\equiv F(\xi,\eta,\tau)|_{\xi=x(t),\eta=\dot{x}(t),\tau=t}\end{aligned}$$

הפונקציה הזו היא מהצורה

$$L(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

זאת לא אותה פונקציה $L(x,\dot{x})$ שהיתה, זו פונקציה אחרת. לכן העובדה שעבור פונקציה זו $\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{dL}{dt} \neq 0$ אינה מהווה סתירה למה שמצאנו קודם.

זו גם הסיבה שההמילטוניאן הוא לא סתם האנרגיה, אלא הוא האנרגיה כאשר היא רשומה דרך המשתנים q,p. "האנרגיה" E, היא פשוט מספר, גודל פיזיקלי. ההמילטוניאן, $H(q,p)$ הוא פונקציה מסויימת מאוד, ששווה נומרית למספר E.

10.4 תרמודינמיקה

ההקפדה היתרה על העניינים האלה חשובה שבעתיים בתרמודינמיקה. המשוואה היסודית של מערכת תרמודינמית היא

$$U = \mathcal{U}_1(S,V,N)$$

כאשר אני מבדיל בין הגודל של האנרגיה U, לבין הפונקציה $\mathcal{U}_1$ שנותנת את האנרגיה בעזרת S,V,N. הדיפרנציאל של המשוואה הנ"ל הוא

$$dU = TdS - PdV + \mu dN$$

במרומז מוגדר כאן

$$T = \frac{\partial \mathcal{U}_1}{\partial S}$$

ובד"כ רושמים זאת כך,

$$T = \left.\frac{\partial U}{\partial S}\right|_{V,N}$$

כלומר "כאשר V, N קבועים", למעשה הכוונה היא "קשר את U ל-S, V, N דרך $U = \mathcal{U}(S, V, N)$, ואז גזור לפי S".

עכשיו, אם אנו מסתכלים על שינוי תרמודינמי בנפח קבוע, ובמספר חלקיקים קבוע (למשל חימום גז בתוך מיכל שנפחו מוחזק קבוע), אזי

$$dU = TdS$$

נניח כי השינוי בטמפרטורה הוא dT, אנו מגדירים את קיבול החום בנפח קבוע

$$C_V \equiv \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{V,N} = T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{V,N}$$

כדי להבין מה זה אומר, צריך להבין מאיפה נולדו הפונקציות $U = \mathcal{U}_2(T, V, N), S = \mathcal{S}_2(T, V, N)$ כך שניתן בכלל להגדיר

$$\left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{V,N} = \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial T} = T\frac{\partial \mathcal{S}_2}{\partial T}$$

לדוגמא, עבור גז אידאלי ידוע

$$U = \frac{3}{2}Nk_BT$$

כלומר

$$\mathcal{U}_2(T, V, N) = \frac{3}{2}Nk_BT$$

ולפיכך

$$C_V = \frac{\partial \mathcal{U}_2}{\partial T} = \frac{3}{2}Nk_B$$

מה קורה עבור קיבול החום בלחץ קבוע? עבור לחץ קבוע,

$$dU = TdS - PdV$$
$$TdS = dU + PdV$$
$$C_P \equiv T\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_{N,P} = \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{N,P} + P\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{N,P}$$

אם עכשיו מקשרים את הגדלים הפיזיקלים דרך הפונקציות המסויימות

$$
\begin{aligned}
U &= \mathcal{U}_3(T,P,N) \\
V &= \mathcal{V}_3(T,P,N)
\end{aligned}
$$

אזי אפשר לחשב זאת. עבור גז אידאלי,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_3 &= \frac{3}{2}Nk_BT \\
\mathcal{V}_3 &= \frac{Nk_BT}{P}
\end{aligned}
$$

ולכן

$$
\begin{aligned}
C_P &= \frac{3}{2}Nk_B + P\frac{Nk_B}{P} \\
&= \frac{5}{2}Nk_B
\end{aligned}
$$

חשוב להבין שלמרות ש-

$$
\begin{aligned}
C_V &= \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{V,N} \\
C_P &= \left.\frac{\partial U}{\partial T}\right|_{N,P} + P\left.\frac{\partial V}{\partial T}\right|_{N,P}
\end{aligned}
$$

ה-U שמופיע בשתי המשוואת הוא לא אותה פונקציה במובן הפורמלי. נגדיר

$$
\mathcal{F}_1(x,y,z) = \frac{3}{2}zk_Bx
$$

אזי

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U}_2(T,V,N) &= \mathcal{F}_1(T,V,N) \\
\mathcal{U}_3(T,P,N) &= \mathcal{F}_1(T,P,N)
\end{aligned}
$$

אלה פונקציות שונות, הן לוקחות פרמטרים פיזיקליים שונים, אפילו אם שתיהן $\frac{3}{2}Nk_BT$ מבחינה נומרית.

פרק 11

על "משפט החלוקה השווה"

משפט החלוקה השווה אומר ש"כל דרגת חופש תורמת $\frac{1}{2}k_BT$ לאנרגיה". באמת? לא ממש.

למרות שמצטטים אותו כאילו הוא משפט כללי, מסתבר שהוא תקף רק בנסיבות מיוחדות מאוד. הכי קל להוכיח אותו במסגרת האנסמבל הקנוני, וזה הקו שאנקוט כאן. נניח שיש לנו המילטוניאן

$$H = H(p_i, q_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

כאשר N הוא מה שבדרך כלל נקרא "מספר דרגות החופש". ועכשיו נסמן באופן מוכלל את ה-q_i, p_i ב-u_i, כלומר ה-$u_i, i = 1, 2, \ldots, 2N$ רצים גם על ה-p וגם על ה-q. עכשיו, אם יש לנו איזה פונקציה של המשתנים הדינמיים $F(u_i)$, הממוצע התרמודינמי שלה הוא

$$\langle F\rangle = \frac{1}{Z}\int d^{2N}u\, e^{-\beta H}F(u)$$

כאשר

$$Z(\beta) = \int d^{2N}u\, e^{-\beta H(u)}$$

היא פונקצית החלוקה. עכשיו, מה אם רוצים את הממוצע לא של F, אלא של $\frac{\partial F}{\partial u_l}$ עבור l מסויים? במקרה כזה אפשר לעשות אינטגרציה בחלקים,

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial F}{\partial u_l}\right\rangle &= \frac{1}{Z}\int d^{2N}u\, e^{-\beta H}\frac{\partial F}{\partial u_l}\\ &= \underbrace{\frac{1}{Z}e^{-\beta H}F|}_{\text{surface term}} + \frac{\beta}{Z}\int d^{2N}u\, e^{-\beta H}F\frac{\partial H}{\partial u_l}\end{aligned}$$

עכשיו נגביל את עצמנו למיקרים שבהם איבר השפה מתאפס (זה סביר מאוד עבור כל המיקרים שבהם האנרגיה גודלת לאינסוף כאשר הקואורדינטות או התנע גודלים לאינסוף). אז אנו מקבלים

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial u_l}\right\rangle = \beta\left\langle F\frac{\partial H}{\partial u_l}\right\rangle$$

עכשיו נבחר את המקרה הפרטי $F = u_l$ וקיבלנו

$$1 = \beta \left\langle u_l \frac{\partial H}{\partial u_l} \right\rangle$$

כלומר

$$\left\langle u_l \frac{\partial H}{\partial u_l} \right\rangle = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

עכשיו, כדי להמשיך, ניקח את המקרה הפרטי שבו H הוא צורה ריבועית של p, q,

$$H = \sum_{ij} u_i A_{ij} u_j$$

ניתן להניח ש-A_{ij} סימטרית, כי כל חלק לא-סימטרי לא יתרום לסכום. במקרה כזה,

$$\frac{\partial H}{\partial u_l} = 2 \sum_j A_{lj} u_j$$

כלומר

$$H = \frac{1}{2} \sum_i u_i \frac{\partial H}{\partial u_i}$$

ואז האנרגיה התרמודינמית היא

$$\begin{aligned} U = \langle H \rangle &= \frac{1}{2} \sum_i \left\langle u_i \frac{\partial H}{\partial u_i} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_i k_B T \\ &= \sum_{i=1}^{2N} \frac{k_B T}{2} \end{aligned}$$

כלומר <u>כל u תורם $\frac{1}{2} k_B T$ לאנרגיה</u>. ראשית, נשים לב שזה קצת אחרת ממה שנכתב בהתחלה. שם נכתב "כל דרגת חופש תורמת $\frac{1}{2} k_B T$", עכשיו מסתבר שעבור צורה ריבועית של H, כל דרגת חופש תורמת $k_B T$. חצי $k_B T$ מגיע מהקואורדינטה של דרגת החופש, וחצי שני מגיע מהתנע הצמוד.

שנית, עבור גז אידאלי חופשי

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m}$$

, המקדמים של הקואורדינטות הם אפס (H כולו הוא האנרגיה הקינטית), ולכן יש לנו תרומה רק מחצי הסכום (התרומה של p_x, p_y, p_z), כלומר אנו מקבלים

$$U = \sum_{i=1}^{N} \frac{k_B T}{2} = \frac{N k_B T}{2}$$

כמובן שזה לא נראה מוכר כי N שלנו מונה את דרגות החופש ולא את החלקיקים. נסמן מחדש $N \to N'$ עבור מספר דרגות החופש וכך, בשלושה מימדים $N' = 3N$ ולכן

$$U = \frac{3}{2} N k_B T$$

עכשיו, עבור מערכות שהאנרגיות בהן הן אנרגיות קינטיות (כולל רוטציה וויברציה), בד"כ אפשר לרשום את האנרגיה כצורה ריבועית, משום שהפוטנציאל היחיד בסביבה הוא הפוטנציאל של הוויברציה, ואם מניחים תנודות קטנות, אז הוא ריבועי. לפיכך עבור גזים אידאליים שמורכבים ממולקולות עם אינטראקציה זניחה בין המולקולות, עדיין יהיה משפט החלוקה השווה תקף. זה גם עובד טוב עבור תנודות קטנות בגבישים, משום שגם שם ההמילטוניאן הוא בקירוב סכום של אוסצילטורים הרמוניים, כלומר, ריבועי.

ומה אם ההמילטוניאן הוא לא צורה ריבועית? אז לא!

Bibliography

[1] P. A. M. Dirac. *The Principles of Quantum Mechanics.* Oxford : Clarendon Press, 4 edition, 1958.

[2] Gerald Gwinner. Experimental tests of time dilation in special relativity. *Mod. Phys. Lett.*, A20:791–805, 2005.

[3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz. *The Classical Theory of Fields.* Pergamon Press, fourth revised edition, 1975.

[4] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M. *Quantum mechanics: non-relativistic theory.* Butterworth-Heinemann, 3rd revised edition, 1977.

[5] G. Saathoff, S. Karpuk, U. Eisenbarth, G. Huber, S. Krohn, R. Muñoz Horta, S. Reinhardt, D. Schwalm, A. Wolf, and G. Gwinner. Improved test of time dilation in special relativity. *Phys. Rev. Lett.*, 91(19):190403, Nov 2003.