טנזורים ומטריצות - מתכון לצרות

יואב קלינברגר*

28 בדצמבר 2006

תקציר

מאמר קצר זה מטרתו להדגים כי ההצגה של טנזורים מדרגה שנייה כמטריצות טומנת בחובה פוטנציאל גדול להסקת טעויות. מאחר שבכל זאת יש יתרונות לכך, יש להיזהר ולדקדק כאשר עושים זאת.

כפי שראינו, הדבר שמגדיר טרנספורמציית לורנץ הוא התנאי,

$$g_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\rho}\Lambda^{\nu}{}_{\sigma} = g_{\rho\sigma} \tag{1}$$

כאשר $g_{\mu\nu}$ נתונה היא המטריקה של מינקובסקי. אם נגדיר את המטריצה $\mathbf{\Lambda}$ כך שבשורה ה-μ, בעמודה ה-ν שלה נמצא $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$, ונגדיר את $\boldsymbol{g}$ כמטריצה שהאלמנטים שלה הם $g_{\mu\nu}$, ניתן לרשום את (1) בצורה מטריצית

$$\boldsymbol{g}_{\mu\nu}\mathbf{\Lambda}_{\mu\rho}\mathbf{\Lambda}_{\nu\sigma} = \boldsymbol{g}_{\rho\sigma}$$

חשוב לשים לב ש"זנחנו" את האופי של האינדקסים, קונטרה- או קו-ווריאנטיים. הסיבה היא, כפי שנראה בהמשך, שעולם הטנזורים ועולם המטריצות הם לא אותו עולם. לעת עתה נמשיך בפיתוח של המשוואה המטריצית,

$$\mathbf{\Lambda}_{\nu\sigma}\boldsymbol{g}_{\mu\nu}\mathbf{\Lambda}_{\mu\rho} = \boldsymbol{g}_{\rho\sigma}$$
$$\mathbf{\Lambda^{T}}_{\sigma\nu}\boldsymbol{g}_{\nu\mu}\mathbf{\Lambda}_{\mu\rho} = \boldsymbol{g}_{\rho\sigma}$$

כאשר $\mathbf{\Lambda^T}$ היא המטריצה המשוחלפת (transposed) שמתאימה למטריצה $\mathbf{\Lambda}$, והשתמשנו ב-$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$. במשוואה האחרונה האינדקסים מאורגנים בסדר הנכון כדי להפוך אותה למשוואה של כפל מטריצות:

$$\mathbf{\Lambda^T}\boldsymbol{g}\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{g} \tag{2}$$

אחת המטריצות הפשוטות שמקיימות זאת היא מטריצת ה-boost בכיוון z:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} \sim \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \tag{3}$$

ניתן להסיק ממשוואה (2), על ידי לקיחת הדיטרמיננט של שני הצדדים, את התכונה

$$(\det \mathbf{\Lambda})^2 = 1$$
$$\det \mathbf{\Lambda} = \pm 1 \tag{4}$$

אנו ניקח בד"כ את הסט של המטריצות עם $\det\mathbf{\Lambda} = 1$, המטריצות עם $\det\mathbf{\Lambda} = -1$ מייצגות טרנספורמציות של שיקופים מרחביים והיפוך זמן, ומהוות סיפור בפני עצמן.
פעמים רבות רושמים משהו כגון

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = (\Lambda^T)_{\nu}{}^{\mu} \tag{5}$$

במקרה כזה טבעי לרשום גם

$$(\Lambda^T)^{\mu}{}_{\nu} = \Lambda_{\nu}{}^{\mu} \tag{6}$$

מצד שני,

$$\begin{aligned}\Lambda^{\mu}{}_{\nu} &= g^{\mu\alpha}\Lambda_{\alpha}{}^{\beta}g_{\beta\nu}\\ &= g^{\mu\alpha}(\Lambda^T)^{\beta}{}_{\alpha}g_{\beta\nu}\\ &= g_{\nu\beta}(\Lambda^T)^{\beta}{}_{\alpha}g^{\alpha\mu}\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו בסימטרייה של המטריקה. המשוואה המטריצית המתאימה היא (שימו לב שהסדר של μ, ν הפוך בין שני האגפים, ולכן יש שחלוף על כל אגף ימין)

$$\begin{aligned}[\mathbf{\Lambda}]_{\mu\nu} &= \left[\boldsymbol{g}\mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}\right]_{\nu\mu}\\ \mathbf{\Lambda} &= \left(\boldsymbol{g}\mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}\right)^{T}\\ \mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{T}} &= \boldsymbol{g}\mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}\end{aligned} \tag{7}$$

אבל, אם נצא ממשוואה (2), תוך שימוש בעובדה ש-$\boldsymbol{gg} = \mathbf{1}$, נקבל

$$\begin{aligned}\mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}\mathbf{\Lambda} &= \boldsymbol{g}\\ \boldsymbol{g}\mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g}\mathbf{\Lambda} &= \mathbf{1}\\ \boldsymbol{g}\mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{g} &= \mathbf{\Lambda}^{-\mathbf{1}}\end{aligned} \tag{8}$$

לפיכך מתחייב משתי התוצאות שלנו (7) ו-(8),

$$\mathbf{\Lambda}^{\boldsymbol{T}} = \mathbf{\Lambda}^{-\mathbf{1}}$$

האם זה נכון? עבור המטריצה מנוסחא (3) לפחות, זה לא נכון.
מה קרה פה? העניין הוא ששתי צורות הנוטציה, של טנזורים ושל מטריצות, לא עקביות באופן כללי, כי יש מטריצות שונות לגרסאות שונות של אותו טנזור, $T^{\mu\nu}, T^{\mu}{}_{\nu}, T_{\mu}{}^{\nu}$.
על אף זאת, טנזור מדרגה שנייה הוא אכן מטריצה (סידור מלבני של מספרים), וניתן לקחת את הדיטרמיננט שלו וכולי, כל עוד נזהרים, כפי שעשינו בפיתוח של (2) ו-(4). יש להגדיר מטריצה אחת, עבור גרסה ספציפית של הטנזור, ולעבוד ביחס אליה כל הזמן. מה שקרה לנו הוא בעצם שהמשוואות (5) ו-(6) לא עיקביות זו עם זו.